ММ 266 (5 баллов)

Ответ: для дней рождения Васиных товарищей может быть два варианта

3,5,7,11,17,19,26.

5,11,17,19,21,23,26.

Решение:

Используя формулу для количества делителей числа $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$ $\tau(n) = \prod_{i=1}^{k}(1+\alpha_i)$, находим $n^3 = \prod_{i=1}^{k} p_i^{3\alpha_i}$, $\tau(n^3) = \prod_{i=1}^{k}(1+3\alpha_i)$
Из исходного уравнения

$$\tau(n^3) = (\tau(n))^2 \qquad (1)$$

получаем равенство

$$\prod_{i=1}^{k}(1+3\alpha_i) = \prod_{i=1}^{k}(1+\alpha_i)^2$$

Заметим, что при $\alpha_i \geq 1$: $\alpha_i \leq {\alpha_i}^2$, поэтому справедлива оценка $1 + 3\alpha_i \leq 1 + 2\alpha_i + {\alpha_i}^2 = (1+\alpha_i)^2$, и в результате

$$\prod_{i=1}^{k}(1+3\alpha_i) \leq \prod_{i=1}^{k}(1+\alpha_i)^2.$$

Так что $\tau(n^3) \leq (\tau(n))^2$, а равенство возможно, только если $\alpha_i = 1$ и $n = \prod_{i=1}^{k} p_i$

Таким образом, для семи чисел-дней рождения Васиных однокурсников, образующих набор $N = (n_1, \dots, n_7)$, подходят только попарно взаимно простые числа, принадлежащие множеству

$$\{1,2,3,5,6,7,10,11,13,14,15,17,19,21,22,23,26,29,30,31\}.$$

Известно, что Вася родился в том же году, что и его однокурсники, родившиеся в январе, и старше их. Значит, Вася родился также в январе. И никто из его однокурсников не мог родиться 1 января. Число 1, как кандидат на число набора N отпадает.

Перебор всех возможных вариантов дает два набора, указанные в ответе. Следующие соображения позволяют существенно ограничить перебор.

Каждое составное число, не превосходящее 30, делится либо на два либо на три. Поэтому составных чисел в наборе не более двух.

1)Если составных чисел в наборе ровно два, то это 26 и 21. В противном случае максимальная сумма кубов двух взаимно простых составных $26^3 + 15^3 = 20951$ меньше минимально возможной суммы кубов оставшихся простых, среди которых три максимальных не меньше, чем $17,19,23$: $17^3 + 19^3 + 23^3 = 23939$.

В случае, если набору принадлежат числа $21, 26$, тогда остальные числа набора – простые числа $5,11,17,19,23$. Действительно, $26^3 + 21^3 = 26837 > 5^3 + 11^3 + 17^3 + 19^3 + 23^3 = 25395$ – условие задачи выполнено. А для следующей по возрастанию возможной суммы кубов пяти простых чисел имеем $26^3 + 21^3 = 26837 < 5^3 + 11^3 + 17^3 + 19^3 + 29^3 = 37617$ -

$-$ условие задачи не выполнено.

2) Если составное число A в наборе ровно одно, то это 26. Действительно, простые делители числа A содержатся среди первых шести простых чисел: $2,3,5,7,11,13$, а куб числа A должен быть больше суммы кубов шести простых чисел, наибольшее из которых не меньше, чем восьмое простое -19. Значит, $A \geq 22$.

Если $A = 22$, то для шести остальных чисел набора единственно возможный вариант: $3,5,7,13,17,19$, при этом сумма кубов этих чисел 14464 больше 10648 - куба числа A - условие задачи не выполнено.

Пусть $A = 26$, а остальные числа минимально возможные:

$3,5,7,11,17,19$. $26^3 = 17576 > 3^3 + 5^3 + 7^3 + 11^3 + 17^3 + 19^3 = 13598$ – условие задачи выполнено. А для следующей по возрастанию возможной суммы кубов шести простых чисел имеем $26^3 = 17576 < 3^3 + 5^3 + 7^3 + 11^3 + 17^3 + 23^3 = 18906 -$ условие задачи не выполнено.

Уравнение (1) является частным случаем такого уравнения

$$\tau(n^a) = \left(\tau(n)\right)^b \qquad (2)$$

Перейдем к рассмотрению этого уравнения. Тривиальный случай $a = b = 1$ не рассматриваем.

Приходим к равенству

$$\prod_{i=1}^{k}(1 + a\alpha_i) = \prod_{i=1}^{k}(1 + \alpha_i)^b$$

При $b = 1$ имеем $1 + a\alpha_i \geq 1 + \alpha_i > 0$, поэтому

$$\prod_{i=1}^{k}(1 + a\alpha_i) \geq \prod_{i=1}^{k}(1 + \alpha_i)$$

И равенство возможно, только если $a = 1$. Этот случай не рассматриваем.

В дальнейшем, $b \geq 2$.

1) $1 + a < 2^b$. В этом случае $1 + a\alpha_i < (1 + \alpha_i)^b$ при каждом $\alpha_i \geq 1$.

Действительно, для функции $f(x) = (1 + x)^b - ax - 1$ имеем

$f(1) = 2^b - a - 1 > 0, f''(x) = b(b - 1)(1 + x)^{b-2} > 0,$

$$f'(x) = b(1 + x)^{b-1} - a, f'(1) = b2^{b-1} - a = \frac{b}{2}2^b - a > 2^b - a - 1 > 0$$

Поскольку $f''(x) > 0, f'(x)$ возрастает, поэтому при $x > 1$: $f'(x) > f'(1) > 0$

Значит, функция $f(x)$ при $x > 1$ возрастает, и потому $f(x) > f(1) > 0$.

Мы доказали, что при $x > 1$: $f(x) = (1 + x)^b - ax - 1 > 0$.

Поэтому $1 + a\alpha_i < (1 + \alpha_i)^b$ при каждом $\alpha_i \geq 1$. И значит,

$$\prod_{i=1}^{k}(1 + a\alpha_i) < \prod_{i=1}^{k}(1 + \alpha_i)^b.$$

Уравнение (2) решений не имеет.

2) $1 + a = 2^b$. В этом случае для функции $f(x) = (1 + x)^b - ax - 1$ последовательно получаем

$$f(1) = 0, f''(x) > 0, f'(1) > 0, f'(x) > f'(1) > 0, f(x) > f(1) = 0$$

Поэтому $1 + a\alpha_i < (1 + \alpha_i)^b$ при каждом $\alpha_i > 1$,

А учитывая что при $\alpha_i = 1$: $1 + a\alpha_i = (1 + \alpha_i)^b$, получаем

$$\prod_{i=1}^{k}(1 + a\alpha_i) \leq \prod_{i=1}^{k}(1 + \alpha_i)^b.$$

А равенство возможно только, если $\alpha_i = 1$.

Уравнение (2) имеет решение в виде $n = \prod_{i=1}^{k} p_i$ и только такие.

3)$1 + a > 2^b$. В этом случае для некоторых пар (a, b) возможны решения.

Например, пусть $b \geq 2$ и при каждом натуральном $c \geq 1 : a = \frac{(1+c)^b - 1}{c}$.

Тогда $1 + ac = (1 + c)^b$, и поэтому любое число вида $n = \prod_{i=1}^{k} {p_i}^c$ является решением уравнения (2).

Интересен вопрос, могут ли у уравнения (2) быть решения n, при разложении на простые множители которого показатели степеней различны.

Такое уравнение, действительно, есть.

Пусть $a = 7, b = 2$. Уравнения $\tau(n^7) = \left(\tau(n)\right)^2$ имеет решения вида

$$n = p_1 {p_2}^7 {p_3}^9 \prod_{i=3}^{k} {p_i}^5$$

Действительно,

$$\tau(n^7) = (1 + 7)(1 + 49)(1 + 63)(1 + 35)^{k-3} = 2^{10} 5^2 36^{k-3}$$

$$\tau(n) = (1 + 1)(1 + 7)(1 + 9)(1 + 5)^{k-3} = 2^5 \cdot 5 \cdot 6^{k-3}$$

$$\tau(n^7) = \left(\tau(n)\right)^2$$