ММ 267 (5 баллов)

Ответ: Указанных разбиений при каждом значении разбиваемого числа n одинаковое количество. Так что прав Петя.

Решение: каждое разбиение числа n на натуральные слагаемые будем записывать вектором $(f_1, f_2, \dots, f_s)$, где f_i - количество слагаемых, равных i, а $s-$ наибольшее слагаемое в разбиении. Через A_n обозначим множество разбиений, для которых $\forall i \in N\colon f_i \leq 2$. Через B_n обозначим множество разбиений, для которых $\forall i \in N\colon f_{3i} = 0$.

Докажем, что $\forall n \in N\colon |A_n| = |B_n|$. Для этого построим взаимно однозначное соответствие между разбиениями из множества A_n и разбиениями из множества B_n.

1)Рассмотрим разбиение a_n из множества A_n, описываемое вектором $(f_1, f_2, \dots, f_s)$. Этому разбиению поставим в соответствие новое разбиение $b_n = c(a_n) \in B_n$ числа n по такому правилу:

а) слагаемые, не кратные трем, не меняем,

б) если слагаемое, кратно трем и имеет вид $3^t u$, где u не кратно трем, то из него образуем 3^t слагаемых, равных u. Сумма всех чисел при этом не изменилась.

Таким образом построенное новое разбиение b_n числа n не содержит слагаемых, кратных трем, поэтому это разбиение принадлежит множеству B_n.

Пусть разбиение b_nописывается вектором $(g_1, g_2, \dots, g_r)$. При этом в разбиении b_n каждое число u (а оно не кратно трем), встречающееся g_u раз, появляется при разбиении некоторого числа вида $3^t u, t > 0$ либо оставалось неизменным как слагаемое (тогда будем считать $t = 0$), поэтому $g_u = \sum_{t \in N_0} f_{3^t u} 3^t$, причем $f_{3^t u} \leq 2$.

2) Рассмотрим некоторое разбиение b_n из множества B_n, описываемое вектором $(g_1, g_2, \dots, g_r)$.

Для каждого $i = 1, \dots, r$ представим число g_i в троичной системе счисления:

$g_i = \sum_t w_t 3^t, w_t \in \{0,1,2\}$. Тогда для чисел вида $j = 3^t i, t \geq 0$ определяем f_j по такому правилу: $f_j = w_t$. И полученное разбиение удовлетворяет условию $f_j \leq 2$. Значит, $a_n \in A_n$, и $b_n = c(a_n)$. А из единственности представления числа в троичной системе счисления следует, что такое разбиение $a_n \in A_n$ единственно.

Мы построили явно взаимно однозначное соответствие между конечными множествами A_n и B_n. Следовательно, указанных разбиений при каждом значении разбиваемого числа n одинаковое количество. Так что Вася не прав, а Петя, утверждающий обратное, оказался правым.

Рассмотрим естественное обобщение. Для заданного натурального $p \geq 2$ через A_n обозначим множество разбиений, для которых $\forall i \in N: f_i \leq p-1$, через B_n обозначим множество разбиений, для которых $\forall i \in N: f_{pi} = 0$.

Докажем, что $\forall n \in N: |A_n| = |B_n|$. Для этого построим взаимно однозначное соответствие между разбиениями из множества A_n и разбиениями из множества B_n.

1)Рассмотрим разбиение a_n из множества A_n, описываемое вектором $(f_1, f_2, \dots, f_s)$. Этому разбиению поставим в соответствие новое разбиение $b_n = c(a_n) \in B_n$ числа n по такому правилу:

а) слагаемые, не кратные числу p, не меняем,

б) если слагаемое, кратно числу p и имеет вид $p^t u$, где u не кратно p, то из него образуем p^t слагаемых, равных u. Сумма всех чисел при этом не изменилась.

Таким образом построенное новое разбиение b_n числа n не содержит слагаемых, кратных р, поэтому это разбиение принадлежит множеству B_n.

Пусть разбиение b_nописывается вектором $(g_1, g_2, \dots, g_r)$. При этом в разбиении b_n каждое число u (а оно не кратно р), встречающееся g_u раз, появляется при разбиении некоторого числа вида $p^t u, t > 0$ либо оставалось неизменным как слагаемое (тогда будем считать $t = 0$), поэтому $g_u = \sum_{t \in N_0} f_{p^t u} p^t$, причем $f_{p^t u} \leq p-1$.

2) Рассмотрим некоторое разбиение b_n из множества B_n, описываемое вектором $(g_1, g_2, \dots, g_r)$.

Для каждого $i = 1, \dots, r$ представим число g_i в системе счисления с основанием p: $g_i = \sum_t w_t p^t, w_t \in \{0,1, \dots, p-1\}$. Тогда для чисел вида $j = p^t i, t \geq 0$ определяем f_j по такому правилу: $f_j = w_t$. И полученное разбиение удовлетворяет условию $f_j \leq p-1$. Значит, $a_n \in A_n$, и $b_n = c(a_n)$. А из единственности представления числа в системе счисления с основанием p следует, что такое разбиение $a_n \in A_n$ единственно.

Мы построили явно взаимно однозначное соответствие между конечными множествами A_n и B_n. Следовательно, указанных разбиений при каждом значении разбиваемого числа n одинаковое количество.

Техника с помощью производящей функции позволяет получить более разнообразные классы разбиений, содержащих одинаковое количество разбиений числа n.

i)Предположим натуральные числа m_0, m_1 таковы, что уравнение

$$2k(m_0+1) = (2l+1)(m_1+1)$$

не имеет целочисленных решений.

Через A_n обозначим множество разбиений, для которых $\forall i \in N: f_{2i} \leq m_0, f_{2i-1} \leq m_1$.

Производящая функция для таких разбиений имеет вид

$$F(z) = \prod_{k \in N} (1 + z^{2k} + \dots + z^{2km_0})\,(1 + z^{2k-1} + \dots + z^{(2k-1)m_1})$$

После преобразований с учетом условия i) получаем

$$F(z) = \prod_{k \in N} \frac{1 - z^{2k(m_0+1)}}{1 - z^{2k}} \frac{1 - z^{(2k-1)(m_1+1)}}{1 - z^{2k-1}} = \prod_{\substack{j \in N: \\ j \not\equiv 0 mod(2m_0+2) \\ j \not\equiv (m_1+1) mod(2m_1+2)}} \frac{1}{1 - z^j}$$

Но в этом же виде можно представить и такую функцию

$$G(z) = \prod_{\substack{j \in N: \\ j \not\equiv 0 mod(2m_0+2) \\ j \not\equiv (m_1+1) mod(2m_1+2)}} (1 + z^j + z^{2j} + \cdots),$$

которая является производящей для разбиений из класса B_n, для которых

$$f_j = 0, j \equiv 0 mod(2m_0 + 2), (m_1 + 1) mod(2m_1 + 2)$$

Таким образом, количество разбиений в классах A_n и B_n одинаково.

Например, пусть $m_0 = 1, m_1 = 2$. Поскольку уравнение $4k = 3(2l + 1)$ целочисленных решений не имеет, то условие i) выполнено.

В этом случае класс A_n содержит разбиения, для которых $\forall i \in N: f_{2i} \leq 1, f_{2i-1} \leq 2$. А класс B_n содержит разбиения, для которых

$$f_j = 0, j \equiv 0 mod 4, 3 mod 6$$

Из общего утверждения следует, что количество разбиений в классах A_n и B_n одинаково.