ММ 270 (5 баллов)

Ответ: $f_{max} = \begin{cases} 8, m = 2 \\ 16, m = 3 \\ 7m - 4, m \geq 4 \end{cases}$

Решение: Заметим, что в предыдущей задаче уже доказано, что выпуклых многогранников класса 1 не существует. Далее $m \geq 2$.

Пусть у многогранника v, e, f – количества вершин, ребер, граней, и $(f_3\ , f_4, \dots, f_s)$ – вектор граней, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_v$ – степени вершин.

Выпишем известные и полученные в предыдущих задачах соотношения:

$$f = f_3 + f_4 + \cdots + f_s$$

$$2e = 3f_3 + 4f_4 + \cdots + sf_s$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_v = 2e$$

Поскольку в каждой вершине сходится не меньше трех ребер: $\alpha_j \geq 3$, то имеем $(\alpha_1 - 3) + (\alpha_2 - 3) + \ldots + (\alpha_v - 3) \geq 0$.

С другой стороны $(\alpha_1 - 3) + (\alpha_2 - 3) + \ldots + (\alpha_v - 3) = 2e - 3v$

С учетом теоремы Эйлера $v = e + 2 - f$, получаем

$$(\alpha_1 - 3) + (\alpha_2 - 3) + \ldots + (\alpha_v - 3) = 2e - 3(e + 2 - f) = 3f - e - 6 =$$

$$= 3(f_3 + f_4 + \cdots + f_s) - \frac{3f_3 + 4f_4 + \cdots + sf_s}{2} - 6$$

$$= \frac{3f_3}{2} + f_4 + \frac{f_5}{2} - \frac{f_7}{2} - f_8 - \cdots - \left(\frac{s}{2} - 3\right) f_s - 6$$

Так что

$$(\alpha_1 - 3) + (\alpha_2 - 3) + \ldots + (\alpha_v - 3) + \frac{f_7}{2} + f_8 + \cdots + \left(\frac{s}{2} - 3\right) f_s + 6$$

$$= \frac{3f_3}{2} + f_4 + \frac{f_5}{2}$$

И если известно, что $f_k \leq m, k = 3,4, \dots, s$, то учитывая также неотрицательность слагаемых слева, получим оценку

$$\frac{f_7}{2} + f_8 + \cdots + \left(\frac{s}{2} - 3\right) f_s + 6 \leq 3m \tag{1}$$

Понятно, что для получения максимального значения суммы $f_7 + f_8 + \cdots + f_s$ желательно, чтобы выполнялись равенства $f_3 = f_4 = f_5 = m$. И тогда последовательно увеличиваем значение f_7 не нарушая оценки $f_7 \leq m$ и оценки (1), затем увеличиваем значение f_8 не нарушая оценки $f_8 \leq m$ и оценки (1), а затем увеличиваем значение f_9 не нарушая оценки $f_9 \leq m$ и оценки (1). При этом следим за четностью количества граней с нечетным количеством сторон.

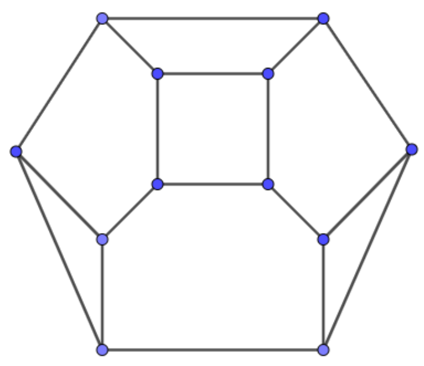
При $m = 2$ получаем $f_7 = f_8 = \cdots = 0$. $f_{max} \leq 2 + 2 + 2 + 2 = 8$.

При $m = 3$ получаем $\frac{f_7}{2} + f_8 + \cdots + \left(\frac{s}{2} - 3\right) f_s \leq 3$, и максимальное значение f с учетом четности количество граней с нечетным количеством сторон получается при $f_7 = 2, f_8 = 2, f_s = 0, s \geq 9$ $f_{max} \leq 3 + 3 + 3 + 3 + 2 + 2 = 16$ (или при $f_7 = 3, f_8 = 0, f_s = 1, f_s = 0, s \geq 10$ $f_{max} \leq 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 1 = 16$).

При $m \geq 4$ получаем $\frac{f_7}{2} + f_8 + \cdots + \left(\frac{s}{2} - 3\right) f_s \leq 3m - 6$, и максимальное значение f с учетом четности количество граней с нечетным количеством сторон может получиться при $f_7 = m, f_8 = m, f_9 = m - 4, f_s = 0, s \geq 10$ $f_{max} \leq 7m - 4$.

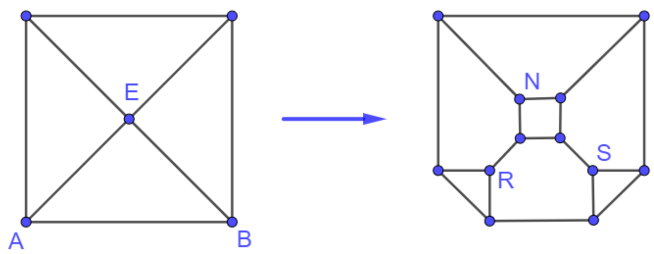
Приведем построение выпуклых многогранников, для которых эти оценки достигаются.

При $m = 2$ берем за основу куб и отсекаем пирамиды достаточно малых размеров (такую операцию назовем Отсеканием) возле двух его вершин. Получаем выпуклый многогранник:



(2,2,2,2)

При $m = 3$ берем за основу четырехугольную пирамиду, применим операцию Отсекания к вершинам A, B, E:



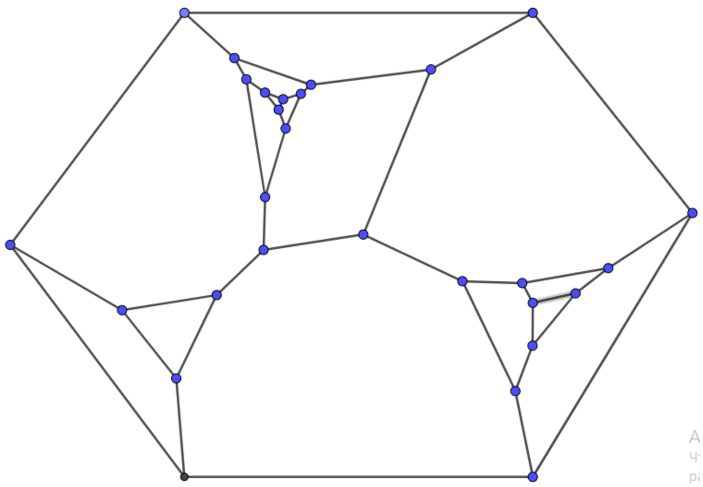
А далее применим операцию Отсекания к вершине R, а затем, начиная с вершины S, применим последовательность Отсеканий:

$$(3,5,7) \to (3,4,6,8) = \big((3,4,6),8\big) \to \big((3,4,5,7),8\big) = \big((3,4,5),7,8\big)$$
$$\to \big((3,4,5,6),7,8\big) = (3,4,5,6,7,8),$$

а затем, начиная с вершины N, применим последовательность Отсеканий:

$$(4,4,6) \to (3,5,5,7) = \big((3,5,7),5\big) \to \big((3,4,6,8),5\big) = \big((3,4,6),8,5\big) \to$$
$$\big((3,4,5,7),8,5\big) = \big((3,4,5),7,8,5\big) \to (3,4,5,6),7,8,5) = (3,4,5,6,7,8,5).$$

В результате получим выпуклый многогранник



с вектором граней (3,3,3,3,2,2).

Для получения выпуклого многогранника при $m = 4$ берем уже полученный многогранник при $m = 3$. Применим несколько операций Отсекания, начиная с вершины (3,4,5):

$$(3,4,5) \to (3,4,5,6) = \big((3,4,6),5\big) \to \big((3,4,5,7),5\big) = \big((3,4,5),7,5\big)$$
$$\to \big((3,4,5,6),7,5\big) = (3,4,5,6,7,5)$$

Получаем дополнительные грани (5,6,7).

Применим ещё раз ту же последовательность операций Отсекания, начиная с вершины (3,4,5), получим в результате дополнительные грани (5,5,6,6,7,7).

Далее, применим несколько операций Отсекания, начиная с имеющейся вершины (5,6,7):

$$(5,6,7) \to (3,6,7,8) = \big((3,6,7),8\big) \to \big((3,4,7,8),8\big) = (3,4,7,8,8)$$

В результате получим дополнительные грани (3,4,5,6,7,7,8,8). Таким образом, имеем выпуклый многогранник с вектором граней (4,4,4,4,4,4).

Пусть при $m = k \geq 4$ уже построен выпуклый многогранник с вектором граней

$$(k, k, k, k, k, k, k-4).$$

И в одной из вершин сходятся 5-, 6- и 7-угольная грани.

Применим несколько операций Отсекания, начиная с вершины (5,6,7):

$$\begin{aligned}(5,6,7) \to (3,6,7,8) = \big((3,6,7),8\big) \to \big((3,4,7,8),8\big) = \big((3,4,8),7,8\big)\\ \to \big((3,4,5,9),7,8\big) = \big((3,4,5),9,7,8\big) \to \big((3,4,5,6),9,7,8\big) =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}= \big((3,4,6),5,9,7,8\big) \to \big((3,4,5,7),5,9,7,8\big) = \big((3,4,5),7,5,9,7,8\big)\\ \to \big((3,4,5,6),7,5,9,7,8\big) = \big((3,4,5),6,7,5,9,7,8\big)\\ \to \big((3,4,5,6),6,7,5,9,7,8\big) = (3,4,5,6,6,7,5,9,7,8)\end{aligned}$$

В результате количество граней каждого вида увеличиваем на 1, и получаем выпуклый многогранник с вектором граней

$$(k+1, k+1, k+1, k+1, k+1, k+1, k-3)$$

класса $m = k+1$, для которого $f = 7k+3 = 7m-4$. Заметим, что при этом в одной из вершин сходятся 5-, 6- и 7-угольная грани.

Таким образом, для каждого $m \geq 2$ приведены построения выпуклых многогранников, для которых достигаются полученные выше оценки. Так что

$$f_{max} = \begin{cases} 8, m = 2 \\ 16, m = 3 \\ 7m-4, m \geq 4 \end{cases}$$

Заметим, что из равенства $(\alpha_1 - 3) + (\alpha_2 - 3) + \ \dots + (\alpha_v - 3) = 2e - 3v$ мы уже получили неравенство

$$(\alpha_1 - 3) + (\alpha_2 - 3) + \ \dots + (\alpha_v - 3) = 3f - e - 6.$$

А из него получаем равенство

$$e = -(\alpha_1 - 3) - (\alpha_2 - 3) - \ \dots - (\alpha_v - 3) + 3f - 6$$

И поскольку $\alpha_j \geq 3$, а $f \leq f_{max}$, то получаем

$$e \leq 3f_{max} - 6.$$

С другой стороны, для многогранников с максимальным количеством граней кроме очевидного равенства $f = f_{max}$ также выполняются и равенства $\alpha_j = 3$. А значит, **максимальное количество ребер выпуклого многогранника класса $\boldsymbol{m}$ определяется как**

$$\boldsymbol{e_{max} = 3f_{max} - 6}$$

и достигается на выпуклых многогранниках, для которых количество граней максимально.

Заметим также, что из равенства $(\alpha_1 - 3) + (\alpha_2 - 3) + \ldots + (\alpha_v - 3) = 2e - 3v$ с учетом $e = v + f - 2$ мы получаем равенство

$$(\alpha_1 - 3) + (\alpha_2 - 3) + \ldots + (\alpha_v - 3) = 2f - 4 - v.$$

А из него получаем равенство

$$v = -(\alpha_1 - 3) - (\alpha_2 - 3) - \ldots - (\alpha_v - 3) + 2f - 4.$$

И поскольку $\alpha_j \geq 3$, а $f \leq f_{max}$, то получаем

$$v \leq 2f_{max} - 4.$$

С другой стороны, для многогранников с максимальным количеством граней кроме очевидного равенства $f = f_{max}$ также выполняются и равенства $\alpha_j = 3$. А значит, **максимальное количество вершин выпуклого многогранника класса $\boldsymbol{m}$ определяется как**

$$\boldsymbol{v_{max} = 2f_{max} - 4}$$

и достигается на выпуклых многогранниках, для которых количество граней максимально.

Общее замечание. Заметим, что в данном решении для получения выпуклых многогранников мы использовали прозрачную процедуру Отсекания.

Если бы мы строили связные планарные графы путем присоединения граней (пририсовывая их), то для их соответствия некоторому выпуклому многограннику пришлось бы проверять их 3-связность, что не является простой процедурой. Такой путь не является удачным, поскольку получающийся граф может не получиться 3-связным.