Задача 193 (5 баллов).

Ответ: количество $с $ партий третьего игрока может принимать все значения той же чётности, что $a+b$ и удовлетворяющие условию

 $\left⌈\frac{a+b-2}{3}\right⌉\leq с\leq 3b-a+2$ при $a>b$

и $\left⌈\frac{2b-2}{3}\right⌉\leq с\leq 2b$ при $a=b$

Решение: Разобьём все партии на блоки из двух соседних, начиная с первой, и пусть всего $n$ пар, и ещё, возможно, одна партия. В каждом таком блоке-паре соседних партий кто-то из трёх игроков сыграл две партии, остальные два – по одной партии. Обозначим через $x$ количество блоков, в которых две партии сыграл первый игрок A, через $y$ - количество блоков, в которых две партии сыграл второй игрок B, через z - количество блоков, в которых две партии сыграл третий игрок C, а через $ ε\_{x}, ε\_{y}, ε\_{z}$ возможное участие в последней нечётной партии. Тогда получаем систему уравнений

 $\left\{\begin{array}{c}n+x+ε\_{x}=a\\n+y+ε\_{y}=b\\n+z+ε\_{z}=c\end{array}\right. (1)$

где целые решения удовлетворяют условиям $0\leq x,y,z\leq n,x+y+z=n, ε\_{x},ε\_{y},ε\_{z}=0,1,ε=ε\_{x}+ε\_{y}+ε\_{z}=2$.

Складывая уравнения системы, получаем $n=\frac{a+b+c-ε}{4}$, далее

 $x=\frac{3a-b-c+ε-4ε\_{x}}{4}\geq 0,y=\frac{3b-a-c+ε-4ε\_{y}}{4}\geq 0,z=\frac{3c-a-b+ε-4ε\_{z}}{4}\geq 0$ , и в результате оценку

$\frac{a+b+4ε\_{z}-ε}{3}\leq с\leq min⁡(3a-b+ε-4ε\_{x},3b-a+ε-4ε\_{y})$ (2)

Кроме того, поскольку из первого уравнения системы следует неравенство $a\leq 2n+1$, а из второго – неравенство $b\geq n$, то получаем оценку

 $b\leq a\leq 2b+1$, (3)

а в случае $ε=0$ :

 $b\leq a\leq 2b$ (4)

1. $ε=0$ $\left\{\begin{array}{c}n+x=a\\n+y=b\\n+z=c\end{array}\right. (5)$

в этом случае оценка (2) приобретает вид

$\frac{a+b}{3}\leq с\leq 3b-a$ ,

 и, кроме того, $n=\frac{a+b+c}{4}$ . Понятно, что $c$ может принимать только те значения в указанных пределах, при которых

 $с≡-\left(a+b\right)mod4$ . (6)

Поскольку $\left(3b-a\right)≡-\left(a+b\right)mod4$ , то возможное максимальное значение равно $3b-a$, и для него имеем решение системы (5)$ n=b,x=a-b\geq 0,y=0,z=z\_{1}=2b-a\geq 0$ .

Рассмотрим решения системы (5), для которых $c$ минимально возможно. Пусть $a+b=6k+r,k\in N,r=0,1,2,3,4,5$. Тогда

a)при $r=0$ : $\left⌈\frac{a+b}{3}\right⌉=2k$, и возможное минимальное значение равно $c=2k$, и для него с учётом (4) $b\geq 2k,a\leq 4k $ и имеем $x=a-2k\geq 0,y=b-2k\geq 0 $, и получаем допустимое решение системы (5)$ n=2k,x=a-2k,y=b-2k,z=z\_{0}=0$

b)при $r=1$ : $\left⌈\frac{a+b}{3}\right⌉=2k+1$, и возможное минимальное значение с учётом (6) равно $с=2k+3$, и для него получаем допустимое решение системы (5). с $n=2k+1,z=z\_{0}=2$

c)при $r=2$ : $\left⌈\frac{a+b}{3}\right⌉=2k+1$, и возможное минимальное значение с учётом (6) равно $с=2k+2$, и для него получаем допустимое решение системы (5). с $n=2k+1,z=z\_{0}=1$

d)при $r=3$ : $\left⌈\frac{a+b}{3}\right⌉=2k+1$, и возможное минимальное значение с учётом (6) равно $с=2k+1$, и для него получаем допустимое решение системы (5). с $n=2k+1,z=z\_{0}=0$

e)при $r=4$ : $\left⌈\frac{a+b}{3}\right⌉=2k+2$, и возможное минимальное значение с учётом (6) равно $с=2k+4$, и для него получаем допустимое решение системы (5). с $n=2k+2,z=z\_{0}=2$

f)при $r=5$ : $\left⌈\frac{a+b}{3}\right⌉=2k+2$, и возможное минимальное значение с учётом (6) равно $с=2k+3$, и для него получаем допустимое решение системы (5). с $n=2k+2,z=z\_{0}=1$

Далее, каждому значению $c=3b-a-4i, i=0,…,\left⌊\frac{2b-a}{3}\right⌋$ соответствует допустимое решение системы (5): $x=a-b+i\geq 0,y=i\geq 0,z=2b-a-3i\geq 0,n=b-i$.

Заметим, что для каждого аналитического решения системы (5) несложно построить матч-реализацию в виде последовательности партий. Например, сначала идут $x$ блоков из двух партий: партия между игроками A и B и партия между игроками A и C, затем идут $y$ блоков из таких двух партий: партия между игроками B и A и партия между игроками B и C, а затем идут $z $блоков из таких двух партий: партия между игроками C и A и партия между игроками C и B (такую последовательность партий назовём канонической с парметрами $(x,y,z,n)$).

Доказано, что **с помощью матчей, состоящих из чётного числа партий можно получить любое значение** $c=3b-a-4i, i=0,…,\left⌊\frac{2b-a}{3}\right⌋$**, то есть любое значение, удовлетворяющее неравенству** $\frac{a+b}{3}\leq с\leq 3b-a$**, и такое, что** $\frac{a+b+c}{4}\in N$ **(множество I).**

$2) ε=2$

 $\left\{\begin{array}{c}n+x+ε\_{x}=a\\n+y+ε\_{y}=b\\n+z+ε\_{z}=c\end{array}\right.$ (7)

В этом случае оценка (2) приобретает вид

$$\frac{a+b+4ε\_{z}-2}{3}\leq с\leq min⁡(3a-b+2-4ε\_{x},3b-a+2-4ε\_{y})$$

И видим, что верхняя граница может быть увеличена до значения 3b-a+2 и **только в случае** $a>b,ε\_{y}$=0,$ ε\_{x}$=1,$ ε\_{z}$=1. Максимально возможному значению $с=3b-a+2$ соответствует решение системы $n=b,x=a-b-1\geq 0,y=0,z=2b-a+1\geq 0$.

В случае $a>b$ для каждого $i=0,…,\left⌊\frac{2b-a}{3}\right⌋$ (а в случае $a=b$ $для i=1,…,\left⌊\frac{2b-a}{3}\right⌋$) возьмём каноническую последовательность партий с параметрами $x=a-b+i\geq 0,y=i\geq 0,z=2b-a-3i\geq 0,n=b-i$. В ней проведём такую замену: первую партию между игроками A и B заменим на две партии: партию между игроками C и A и партию между игроками C и B, а остальные партии, начиная со второй, оставим в той же последовательности, и номер каждой партии, таким образом, увеличится на единицу. Заметим, что ставшая третьей партия между A и С возможна после новой второй партии между игроками C и B. Так что замена корректна, и такая последовательность партий возможна. Для новой последовательности значения $a$ и $b$ не изменились, а значение $с$ увеличилось на 2. Таким образом, кроме полученных ранее, мы **получили ещё и такие значения** $c=3b-a-4i+2, i=0,…,\left⌊\frac{2b-a}{3}\right⌋$ **(множество II)**

Далее замечаем, что нижняя оценка может быть уменьшена до значения $\frac{a+b-2}{3}$ в случае $ε\_{z}$=0,$ ε\_{x}$=1,$ ε\_{y}$=1.

Рассмотрим решения системы (7), для которых $c$ минимально возможно. Пусть $a+b=6k+r,k\in N,r=0,1,2,3,4,5$. Заметим, что

$с≡(2-a-b)mod4$ (8)

Тогда

a)при $r=0$ : $\left⌈\frac{a+b-2}{3}\right⌉=2k$, и возможное минимальное значение с учётом (8) равно $с=2k+2$, и для него получаем допустимое решение системы (7). с $n=2k,z=z\_{0}=2$

b)при $r=1$ : $\left⌈\frac{a+b-2}{3}\right⌉=2k$, и возможное минимальное значение с учётом (8) равно $с=2k+1$, и для него получаем допустимое решение системы (7). с $n=2k,z=z\_{0}=1$

c)при $r=2$ : $\left⌈\frac{a+b-2}{3}\right⌉=2k$, и возможное минимальное значение с учётом (8) равно $с=2k$, и для него получаем допустимое решение системы (7). с $n=2k,z=z\_{0}=0$

d)при $r=3$ : $\left⌈\frac{a+b-2}{3}\right⌉=2k+1$, и возможное минимальное значение с учётом (8) равно $с=2k+3$, и для него получаем допустимое решение системы (7). с $n=2k+1,z=z\_{0}=2$

e)при $r=4$ : $\left⌈\frac{a+b-2}{3}\right⌉=2k+1$, и возможное минимальное значение с учётом (8) равно $с=2k+2$, и для него получаем допустимое решение системы (7). с $n=2k+1,z=z\_{0}=1$

f)при $r=5$ : $\left⌈\frac{a+b-2}{3}\right⌉=2k+1$, и возможное минимальное значение с учётом (8) равно $с=2k+1$, и для него получаем допустимое решение системы (7). с $n=2k+1,z=z\_{0}=0$

Сравнивая полученные минимальные значения для c с полученными в п.1), видим, что в случаях a),d) минимум получился больше и поэтому вошёл в множество II.

А в остальных случаях появляется ещё одно возможное значение: в случаях b) и e) с=$\frac{a+b+2}{3}$ , а в случаях c) и e) с=$\frac{a+b-2}{3}$ . Построим реализацию для этих значений. Для этого возьмём каноническую последовательность партий в реализации минимального значения c в каждом из пп. b),c),e),f) п. 1), заметим, что в каждой из них $z\geq 1$, то есть в конце матча последние две партии имеют вид:

партия между игроками C и A и партия между игроками C и B. При построении нового матча все партии, кроме двух последних оставляем без изменений, а последние две партии меняем на партию между игроками A и B. Заметим, что третья с конца партия в старой последовательности была между игроками C и B в канонической последовательности в каждом из четырёх случаев. Поэтому замена корректна и не привела к нестыковке соседних партий. В результате, количество партий для игроков A и B не изменилась, а количество партий для игрока C уменьшилось на 2.

Таким образом, кроме полученных ранее, мы **получили ещё и такое значение: в случаях b) и e) с=**$\frac{a+b+2}{3}$ **, а в случаях c) и e) с=**$\frac{a+b-2}{3}$ **(множество III).**

Объединение трёх полученных множеств даёт ответ.