Задача 193 (5 баллов).

Ответ: количество партий третьего игрока может принимать все значения той же чётности, что и удовлетворяющие условию

при

и при

Решение: Разобьём все партии на блоки из двух соседних, начиная с первой, и пусть всего пар, и ещё, возможно, одна партия. В каждом таком блоке-паре соседних партий кто-то из трёх игроков сыграл две партии, остальные два – по одной партии. Обозначим через количество блоков, в которых две партии сыграл первый игрок A, через - количество блоков, в которых две партии сыграл второй игрок B, через z - количество блоков, в которых две партии сыграл третий игрок C, а через возможное участие в последней нечётной партии. Тогда получаем систему уравнений

где целые решения удовлетворяют условиям .

Складывая уравнения системы, получаем , далее

, и в результате оценку

(2)

Кроме того, поскольку из первого уравнения системы следует неравенство , а из второго – неравенство , то получаем оценку

, (3)

а в случае :

(4)



в этом случае оценка (2) приобретает вид

,

и, кроме того, . Понятно, что может принимать только те значения в указанных пределах, при которых

. (6)

Поскольку , то возможное максимальное значение равно , и для него имеем решение системы (5) .

Рассмотрим решения системы (5), для которых минимально возможно. Пусть . Тогда

a)при : , и возможное минимальное значение равно , и для него с учётом (4) и имеем , и получаем допустимое решение системы (5)

b)при : , и возможное минимальное значение с учётом (6) равно , и для него получаем допустимое решение системы (5). с

c)при : , и возможное минимальное значение с учётом (6) равно , и для него получаем допустимое решение системы (5). с

d)при : , и возможное минимальное значение с учётом (6) равно , и для него получаем допустимое решение системы (5). с

e)при : , и возможное минимальное значение с учётом (6) равно , и для него получаем допустимое решение системы (5). с

f)при : , и возможное минимальное значение с учётом (6) равно , и для него получаем допустимое решение системы (5). с

Далее, каждому значению соответствует допустимое решение системы (5): .

Заметим, что для каждого аналитического решения системы (5) несложно построить матч-реализацию в виде последовательности партий. Например, сначала идут блоков из двух партий: партия между игроками A и B и партия между игроками A и C, затем идут блоков из таких двух партий: партия между игроками B и A и партия между игроками B и C, а затем идут блоков из таких двух партий: партия между игроками C и A и партия между игроками C и B (такую последовательность партий назовём канонической с парметрами ).

Доказано, что **с помощью матчей, состоящих из чётного числа партий можно получить любое значение , то есть любое значение, удовлетворяющее неравенству , и такое, что (множество I).**

(7)

В этом случае оценка (2) приобретает вид

И видим, что верхняя граница может быть увеличена до значения 3b-a+2 и **только в случае** =0,=1,=1. Максимально возможному значению соответствует решение системы .

В случае для каждого (а в случае ) возьмём каноническую последовательность партий с параметрами . В ней проведём такую замену: первую партию между игроками A и B заменим на две партии: партию между игроками C и A и партию между игроками C и B, а остальные партии, начиная со второй, оставим в той же последовательности, и номер каждой партии, таким образом, увеличится на единицу. Заметим, что ставшая третьей партия между A и С возможна после новой второй партии между игроками C и B. Так что замена корректна, и такая последовательность партий возможна. Для новой последовательности значения и не изменились, а значение увеличилось на 2. Таким образом, кроме полученных ранее, мы **получили ещё и такие значения (множество II)**

Далее замечаем, что нижняя оценка может быть уменьшена до значения в случае =0,=1,=1.

Рассмотрим решения системы (7), для которых минимально возможно. Пусть . Заметим, что

(8)

Тогда

a)при : , и возможное минимальное значение с учётом (8) равно , и для него получаем допустимое решение системы (7). с

b)при : , и возможное минимальное значение с учётом (8) равно , и для него получаем допустимое решение системы (7). с

c)при : , и возможное минимальное значение с учётом (8) равно , и для него получаем допустимое решение системы (7). с

d)при : , и возможное минимальное значение с учётом (8) равно , и для него получаем допустимое решение системы (7). с

e)при : , и возможное минимальное значение с учётом (8) равно , и для него получаем допустимое решение системы (7). с

f)при : , и возможное минимальное значение с учётом (8) равно , и для него получаем допустимое решение системы (7). с

Сравнивая полученные минимальные значения для c с полученными в п.1), видим, что в случаях a),d) минимум получился больше и поэтому вошёл в множество II.

А в остальных случаях появляется ещё одно возможное значение: в случаях b) и e) с= , а в случаях c) и e) с= . Построим реализацию для этих значений. Для этого возьмём каноническую последовательность партий в реализации минимального значения c в каждом из пп. b),c),e),f) п. 1), заметим, что в каждой из них , то есть в конце матча последние две партии имеют вид:

партия между игроками C и A и партия между игроками C и B. При построении нового матча все партии, кроме двух последних оставляем без изменений, а последние две партии меняем на партию между игроками A и B. Заметим, что третья с конца партия в старой последовательности была между игроками C и B в канонической последовательности в каждом из четырёх случаев. Поэтому замена корректна и не привела к нестыковке соседних партий. В результате, количество партий для игроков A и B не изменилась, а количество партий для игрока C уменьшилось на 2.

Таким образом, кроме полученных ранее, мы **получили ещё и такое значение: в случаях b) и e) с= , а в случаях c) и e) с= (множество III).**

Объединение трёх полученных множеств даёт ответ.