Задача 198 (5 баллов)

Найдены десять наименьших значений s=1,…,10 и 4 наибольших значений s=477638700,347993910,312636240,293246550 для 20-тиугольника.

Также найдены все значения s для n-угольника при n=3,4,5,6.

Также найдены отдельные крайние значения s для любого n-угольника.

Решение: 1) Простой перебор вариантов даёт s=1 для треугольника, s=1,2 для четырёхугольника, s=1,2,3,5 для пятиугольника, s=1,2,3,4,5,6,7,9,14 для шестиугольника.

2) Пусть есть два многоугольника с m и n сторонами, которые принадлежат классам sm и sn соответственно. Выберем у каждого из них такую сторону, чтобы весь многоугольник лежал по одну сторону от этой стороны. Один из многоугольников гомотетически растянем так, чтобы выбранные стороны у двух многоугольников стали равны. Склеим эти два многоугольника по выбранной стороне, которая при этом превратилась во внутреннюю диагональ, и если у образованного многоугольника с m+n-2 сторонами появились внутренние диагонали, отличные от диагоналей двух исходных многоугольников и общей стороны, то аффинным преобразованием каждый из исходных многоугольников сложим как книжку по направлению к прямой, содержащей общую сторону, и если необходимо растянем. В результате получим (m+n-2) – угольник , у которого не образовалось новых внутренних диагоналей, кроме одной – той, в которую превратились склеенные стороны. Таким образом, полученный многоугольник принадлежит классу sm\*sn. Такой метод позволяет конструировать многоугольники с составными значенияи s. Понятно, что с помощью такого метода, используя найденные классы для шестиугольника, для каждого значения s=1,…,10 можно построить двадцатиугольник класса s.

Перейдём к анализу наибольших значений s.

3) Понятно, что все выпуклые n-угольники имеют топологически эквивалентные триангуляции. И для них всех класс s одинаков. И понятно, что это значение максимально возможное.

4) Задача триангуляции выпуклого многоугольника известна, решена, а общее количество $N(n)$способов разбиения на треугольники не пересекающимися диагоналями равно числу Каталана, а именно, по одной из формул $N\left(n\right)=\frac{C\_{2n-3}^{n-2}}{2n-3}$ . Формулу можно получить с помощью метода математической индукции на основе следующей рекуррентной формулы. Пусть у $(n+1)$ –угольника $A\_{1}…A\_{n+1}$ в данном разбиении на треугольники $A\_{k}$ - третья вершина треугольника, содержащего сторону $A\_{n}A\_{n+1}$ . Тогдв всего таких разбиений ровно $N(k+1)N(n-k+1)$. Здесь считаем, что $N\left(2\right)=1$. И вообще имеем $N\left(n+1\right)=\sum\_{k=1}^{n-1}N(k+1)N(n-k+1)$.

5) Понятно, что если в заданном многоугольнике некоторая диагональ не является внутренней, и не является короткой, то также не является внутренней и, по крайней мере, ещё одна диагональ, имеющая с исходной общую вершину.

6) Понятно, что если для многоугольника добавляются диагонали, не являющиеся внутренними, то количество разбиений уменьшается.

7) Из п.6) следует, что второе по старшинству значение s получается для многоугольника с одной диагональю, не являющейся внутренней, а из п. 5) следует, что эта диагональ – короткая. В этом случае $s=N\left(n\right)-N(n-1)$.

8) Из п. 6) следует, что третье по старшинству значение s получается для многоугольника с двумя диагоналями, не являющимися внутренними.

Пусть обе диагонали короткие и не имеют общих внутренних точек. Тогда, используя формулу включений-исключений, получаем $s=N\left(n\right)-2N\left(n-1\right)+N(n-2)$.

Если две короткие диагонали, например, $A\_{1}A\_{3}$ и $A\_{2}A\_{4}$, имеющие общую внутреннюю точку, не являются внутренними, то есть ещё и $A\_{1}A\_{4}$ такая. Эта конфигурация нам интересна, как, возможно, дающая четвёртое по старшинству значение s. Также используя формулу включений-исключений, получаем $s=N\left(n\right)-2N\left(n-1\right)$

Пусть обе диагонали, одна из которых короткая, имеют общий конец, например, это диагонали $A\_{1}A\_{3}$ и $A\_{1}A\_{4}$. Тогда $s=N\left(n\right)-N\left(n-1\right)-2N\left(n-2\right)+N\left(n-2\right)=N\left(n\right)-N\left(n-1\right)-N(n-2)$

Сравнивая полученные значения, получаем при $n\geq 7 $третье по старшинству значение s=$ N\left(n\right)-N\left(n-1\right)-N(n-2)$.

9) Из п. 6) следует, что четвёртое по старшинству значение s получается для многоугольника с двумя или тремя диагоналями, не являющимися внутренними.

Кроме рассмотренного выше случая с тремя диагоналями возможны следующие варианты.

Три диагонали короткие и не имеют попарных пересечений по внутренним точкам. Тогда $s= N\left(n\right)-3N\left(n-1\right)+3N\left(n-2\right)-N(n-3)$.

Три диагонали имеют общий конец и развёрнуты в одну сторону, например, $A\_{1}A\_{3}$ , $A\_{1}A\_{4}$, $A\_{1}A\_{5}$. Тогда $s= N\left(n\right)-\left(N\left(n-1\right)+2N\left(n-2\right)+5N\left(n-3\right)\right)+(N\left(n-2\right)+2N\left(n-3\right)+2N(n-3))-N(n-3)=N(n)-N(n-1)-N(n-2)-2N(n-3)$.

Две диагонали, одна из которых короткая, имеют общий конец, например, $A\_{1}A\_{3}$ , $A\_{1}A\_{4}$, и третья короткая, не пересекающая их по внутренним точкам. Тогда $s= N\left(n\right)-\left(N\left(n-1\right)+N\left(n-1\right)+2N\left(n-2\right)\right)+\left(N\left(n-2\right)+N\left(n-2\right)+2N\left(n-3\right)\right)-N\left(n-3\right)=N\left(n\right)-2N\left(n-1\right)+N\left(n-3\right).$

Сравнивая полученные значения, получаем при $n\geq 8 четвёртое$ по старшинству значение s=$ N\left(n\right)-N\left(n-1\right)-N(n-2)-2N(n-3)$ . А при $n=7 четвёртое $ по старшинству значение достигается в двух конфигурациях: с тремя диагоналями, не являющимися внутренними: s=$ N\left(n\right)-N\left(n-1\right)-N(n-2)-2N(n-3)$ =19 и $ с двумя: s=N\left(n\right)-2N\left(n-1\right)+N(n-2))$ =19 .

Таким образом, список старших значений s при $n\geq 8 $следующий:

$$N\left(n\right) $$

$$ N\left(n\right)-N(n-1)$$

 $N\left(n\right)-N\left(n-1\right)-N(n-2)$

 $N\left(n\right)-N\left(n-1\right)-N(n-2)-2N(n-3)$

при $n=7 $следующий:

$$N\left(n\right)=42 $$

$$ N\left(n\right)-N\left(n-1\right)=28$$

 $N\left(n\right)-N\left(n-1\right)-N\left(n-2\right)=23$

 $N\left(n\right)-N\left(n-1\right)-N\left(n-2\right)-2N\left(n-3\right)=N\left(n\right)-2N\left(n-1\right)+N\left(n-2\right)=19$

А при конкретном значении $ n=20$ имеем четыре старших значения s









Используя приведенный метод, можно продолжить исследование, замечая, что k-ое по старшинству значение s получается для многоугольника с диагоналями, не являющимися внутренними, в количестве не больше k.