**Задача 202 (5 баллов)**

*Ответ:* $\left[0;+\infty \right)\∪\_{k=1}^{+\infty }\{k^{2}+k+1\}$

Другими словами уравнение разрешимо только при каждом неотрицательном $a,$ не равном одному из чисел $ 3,7,…,k^{2}+k+1,…$

*Решение:* Пусть $n\leq x<n+1,n\in N$ , тогда $x=n+α,α\in [0,1)$, и исходное уравнение запишется в виде $α^{2}+nα+n^{2}-a=0$. Получается, что исходное уравнение имеет решение на промежутке $n\leq x<n+1$ тогда и только тогда, когда функция $f\left(α\right)=α^{2}+nα+n^{2}-a$ имеет нуль на промежутке $α\in [0,1)$. Анализируем знак производной $\frac{df}{dα}=2α+n$:$ \frac{df}{dα}>0$ при $α>-n/2$ $ \frac{df}{dα}<0$ при $α<-n/2$.

1)$ n\geq 0$. Функция $f\left(α\right)$ на $[0,1)$ возрастает. Поэтому функция $f\left(α\right)=α^{2}+nα+n^{2}-a$ имеет нуль на промежутке $α\in [0,1)$ тогда и только тогда, когда $f\left(0\right)\leq 0,f\left(1\right)>0$ , то есть при

 $n^{2}\leq a<n^{2}+n+1$ (1)

2)$ n\leq -2$. Функция $f\left(α\right)$ на $[0,1)$ убывает. Поэтому функция $f\left(α\right)=α^{2}+nα+n^{2}-a$ имеет нуль на промежутке $α\in [0,1)$ тогда и только тогда, когда $f\left(0\right)\geq 0,f\left(1\right)<0$, то есть при

 $n^{2}+n+1\leq a<n^{2}$ (2)

3)$ n=-1$. Функция $f\left(α\right)$ на $[0,1)$ имеет минимум при $α=1/2$ и максимум при $α=0$. Поэтому функция $f\left(α\right)=α^{2}-α+1-a$ имеет нуль на промежутке $α\in [0,1)$ тогда и только тогда, когда $f\left(1/2\right)\leq 0,f\left(0\right)\geq 0$ , то есть при

 $3/4\leq a\leq 1$ (3)

Объединяя множества вида (1): $\left[0,1\right),\left[1,3\right),\left[4,7\right),…,\left[k^{2},k^{2}+k+1\right),…$

множества вида (2):$\left(3,4\right],\left(7,9\right],…,\left(k^{2}-k+1,k^{2}\right],…$

и множество (3). получаем ответ.