**Задача 205 (5 баллов)**

***Ответ:*** Ниже представлен список чисел в порядке возрастания, имеющих ровно 2016 делителей до появления первый раз числа, не делящего нацело на 2016. Это число 46-е по порядку.





























































































***Решение:*** Если число имеет разложение на простые множители в виде

, то количество его натуральних делителей равно . Действительно, каждый натуральный делитель числа имеет вид определяется мультииндексом для которого есть ровно возможностей.

Нас интересуют числа, имеющие ровно 2016 натуральных делителей, то есть такие, для которых . Поскольку , то число имеет не больше 8-ми различных простых натуральных делителей. В дальнейшем мы воспользуемся этим. Рассмотрим число, которое имеет ровно 2016 натуральных делителей, и, как видно из его разложения, не кратно 9-ти, и, как следствие, не кратно 2016. Позже мы покажем, что число наименьшее из тех, которые имеют 2016 делителей и не кратны 2016.

Пусть - –ое простое число. Для каждого натурального поставим и решим задачу на условный экстремум

*,.*

Логарифмируем целевую функцию и умножаем на произведение первых N простых чисел. Составляем функцию Лагранжа , для неё находим единственную стационарную точку . Поскольку условие ограничения ограничивает в выпуклое множество, то гиперплоскость , касающаяся поверхности в точке с координатами ограничивает её снизу. Так что в точке с координатами достигается минимумом на всей ОДЗ. Получаем оценку

(1)

При правая часть в оценке принимает наименьшее значение, превышающее значение с= 

При 

При 

При 

При 

При 

Пусть , тогда в целевой функции фиксируем натуральные значения для степени двойки, и оценивая аналогично через правую часть неравенства (1), взятого для , получаем при минимальное значение, превышающее значение с=

Таким образом, числа, имеющие 2016 делителей, и не превышающие число , могут иметь ровно семь или ровно восемь различных простых делителей.

Это существенно сужает поиск таких чисел. Выпишем возможные разложения на простые множители

(2)

(3)

(4)

(5)

(6)

здесь через обозначены различные простые числа, не обязательно взятые идущие по порядку. Минимальные числа вида (4),(6) и (7) равны соответственно







и, как видно, превышают число c.

Таким образом, в разложении на простые множители возможны форматы (2),(3) и (5). Это соображение ещё уже сужает поиск.

Далее, поскольку минимальное число формата (2) равно , то далее получаем естественные ограничения: поскольку , то при замене какого-то некратного простого множителя на простое число, не меньшее 47, мы получим число, превышающее число с, таким образом, Аналогично, поскольку , то , поскольку , то . Получаем, ограничения на возможные значения простых сомножителей в числе формата (2), что определяет границы поиска.

Аналогично, для формата (3) минимальное число равно , поэтому поскольку , то поскольку , то , поскольку , то , поскольку , то .

И, наконец, для формата (5) минимальное число равно , поэтому поскольку , то поскольку , то , поскольку , то , и поскольку , то .

Полученные ограничения легли в основу организованного перебора, в результате которого, мы убедились, что число c минимальное среди тех, которые имеют ровно 2016 делителей и не кратны 2016, а также нашли все числа, не превосходящие числа c и имеющие ровно 2016 делителей. Их оказалось 45, а значит, число c Вася выписал 46-ым по порядку.

Программы прилагаются в сопровождающих файлах.

***Комментарий ведущего Марафона*:** *программы (достаточно простые) не предъявляю, но если кому-то интересно, пишите.*