**Задача 207 (5 баллов)**

***Ответ:*** 1) максимальное значение равно 3;

2) максимальное значение равно 3;

3) ;

4) ;

5) доказано, что .

Кроме того, найдены некоторые более общие оценки и конкретные значения как для , так и для их максимальных значений при фиксированном втором аргументе.

***Решение:***

1. **Оценки для в случае нечётного одного из аргументов**

Если число имеет разложение на простые множители в виде

, то количество его натуральних делителей равно . И если число нечётно, то каждое из чисел чётно, из чего следует, что является точным квадратом.

Пусть , тогда . Следовательно, числа и одновременно не могут быть точными квадратами натуральных чисел. А также числа и одновременно не могут быть точными квадратами натуральных чисел. Поэтому не могут быть одновременно нечётными ни пара чисел, ни пара чисел С учётом этого получаем следующие оценки

при (1)

при (2)

при (3)

1. **Оценки для в случае чётных аргументов**

Здесь .

1. Пусть число имеет нечётные простые делители, не являющиеся делителями числа . Обозначим через наименьший среди таких. Тогда каждый член арифметической прогрессии не делится нацело на . Но среди натуральных чисел найдётся одно, которое при делении на даёт остаток , и количество его делителей должно делиться на . Таким образом

(4)

1. Пусть теперь – нечётно, а . пусть – наименьшее нечётное простое число, не являющееся делителем числа . Среди последовательных натуральных чисел найдутся два, которые при делении на дают остаток , и количества их делителей должны делиться на . И тогда соответствующие члены арифметической прогрессии делятся нацело на , и их разность также делится нацело на , но это не так. Таким образом

(5)

На самом деле меньшее из двух чисел, которые при делении на дают остаток может быть не большим, чем то, количество делителей которого, есть наибольшим кратным числу , и находится среди первых чисел. Поэтому для конкретного значения может выполняться более сильная оценка.

Таким образом, как следствие, доказана вполне очевидная

***Теорема 1*** При любых натуральных и .

Обозначим через

1. **Оценка для в случае нечётного**

Из оценок (2),(3) следует оценка

при (6)

1. **Оценка для в случае чётного**

Пусть - наименьшее нечётное простое число, не являющееся делителем числа , а - наибольшее нечётное простое число, являющееся делителем числа (и равно 1 в случае, если ), тогда из оценок (4),(5) следует оценка

при (7)

Таким образом, доказана не вполне очевидная

***Теорема 2*** При любом натуральном .

1. **Значение**

Имеем пример тройки чисел







С учётом оценки (6) получаем . Что и требовалось в 1) пункте задачи.

1. **Значение**

Имеем пример тройки чисел







С учётом оценки (6) получаем Что и требовалось в 2) пункте задачи.

1. **Значение**

Пример пятёрки чисел











даёт оценку

. (8)

Пусть . Тогда простое число. Если , тогда – противоречие. Если , тогда – противоречие. Значит, нечётно, а - чётно. Если , тогда – противоречие. Значит, . Если , тогда – противоречие. Значит, не делится нацело на 3. Но среди трёх последовательных натуральних чисел одно делится нацело на 3. Значит, именно, делится нацело на 3. Число имеет одно из следующих разложений на простые множители: .

Если , тогда, например, из того, что , получаем противоречие.

Если то , поскольку для нечётного имеем . Тогда . И . Но это не так () - противоречие.

Значит, . Тогда, , и при этом, . Далее, (так как ). Значит, , где нечётное простое, большее 3. Как было показано выше , следовательно, . Но тогда . И . Но это не так () Опять противоречие. И получаем оценку . А с учётом и оценки (8) окончательно получаем

. (9)

Что и требовалось в 3) пункте задачи.

1. **Значение**

Пусть .

1). Если - чётно, и кратно 3, то тот же анализ, что и в предыдущем пункте приводит к противоречию.

2). Если - чётно и кратно 3, тогда и

– противоречие

3) Если - чётно, и кратно 3, тогда кратно 6. Следовательно, (но тогда, например, ) либо (но тогда, например, ) либо (но тогда, например, и с учётом имеем , но, тогда, например, – противоречие.

Так что, - нечётно. Тогда чётно. Число имеет одно из следующих разложений на простые множители: .

Если , тогда, например, из того, что , получаем противоречие.

Если , тогда (следует из рассмотренного выше), и тогда, и . Но это не так () - противоречие.

Если ,, следовательно, , тогда (также следует из рассмотренного выше) , и тогда . Противоречие.

И окончательно, получаем противоречие с предположением, что .

И получаем оценку . Возьмём укороченный набор чисел из предыдущего пункта









Окончательно, имеем

Что и требовалось в 4) пункте задачи.

1. **Оценка снизу для**

Пример восьмёрки чисел

















даёт оценку

,

Что и требовалось в 5) пункте задачи.

1. **Значения ,**

Примеры следующих троек чисел

1)







2)







3)







4)







с учётом оценки (6) устанавливают