**Задача 208 (5 баллов)**

***Ответ:*** 44813

***Решение***: Число 44813 можно представить в виде суммы пяти слагаемых каждым из четырёх способов, представленных ниже

1)

 









2)











3)











4)











Из разложений на простые множители видно, что каждая четвёрка чисел удовлетворяет условию.

 Докажем, что найденное число минимально.

Пусть $R(k,m,n)$ – наименьшее число, которое не менее, чем $m$ способами можно представить в виде $n$ слагаемых так, чтобы любые $k$ не взаимно просты, а любые $k+1$ взаимно просты.

Тогда каждый набор $α=\left(α\_{1},…,α\_{k}\right) , 1\leq α\_{1}<…<α\_{k}\leq n$ из $k$ слагаемых должен иметь общий делитель $d\_{α}>1$, и при этом для разных наборов $α$ и $β$ соответствующие числа взаимно просты: $\left(d\_{α},d\_{β}\right)=1$.

Поэтому слагаемые должны иметь вид $a\_{i}=c\_{i }\prod\_{α:α\_{j}=i,j=1,…,n\_{ }}^{}d\_{α}$

$R(2,4,5)$ -это наш случай. И в этом случае представление должно иметь такой вид

$N=c\_{1}d\_{12}d\_{13}d\_{14}d\_{15 }+c\_{2}d\_{12}d\_{23}d\_{24}d\_{25}+c\_{3}d\_{13}d\_{23}d\_{34}d\_{35}$+$c\_{4}d\_{14}d\_{24}d\_{34}d\_{45}+c\_{5}d\_{15}d\_{25}d\_{35}d\_{45}$ (1)

Если хотя бы один из коэффициентов $c\_{i}>1$, то наименьшее значение суммы (1) равно 48407. Далее рассматриваем только случай $c\_{i}=1$ и при этом все

$d\_{ij}$ являются простыми числами.

Если набор $d\_{ij}$ состоит из первых 10-ти простых чисел $(2,3,5,7,11,13,17,19,23,29)$, то минимальное значение суммы (1) равно 42207 (проверено с помощью программы).

Если набор $d\_{ij}$ состоит из простых чисел $(2,3,5,7,11,13,17,19,23,31)$, то минимальное значение суммы (1) равно 43323 (проверено с помощью программы).

Если набор $d\_{ij}$ состоит из простых чисел $(2,3,5,7,11,13,17,19,23,37)$, то минимальное значение суммы (1) равно 46449 (проверено с помощью программы).

Если набор $d\_{ij}$ состоит из простых чисел $(2,3,5,7,11,13,17,19,29,31)$, то минимальное значение суммы (1) равно 48211 (проверено с помощью программы).

Понятно, что для любых других наборов есть монотонность по каждому аргументу либо по сравнению с набором $(2,3,5,7,11,13,17,19,23,37)$, либо с набором $(2,3,5,7,11,13,17,19,29,31)$, то минимальное значение суммы (1) больше 46449. Таким образом, поиск следует проводить по всевозможным перестановкам набора $(2,3,5,7,11,13,17,19,23,29)$ либо набора $(2,3,5,7,11,13,17,19,23,31)$. Это и было сделано и проверено, что число 44813 минимально возможное. Таким образом, $R\left(2,4,5\right)=44813$.

 Также проверено, что

 $R\left(2,1,5\right)=42207,$ $R\left(2,2,5\right)=43035,$ $R\left(2,3,5\right)=44169,$ $R\left(2,5,5\right)=48437,$ $R\left(2,6,5\right)\leq =49025,$ $R\left(2,7,5\right)\leq =49025$, $R\left(2,8,5\right)\leq =53557,$ $R\left(2,9,5\right)\leq =56269$, $R\left(2,10,5\right)\leq =59881,$ $R\left(2,11,5\right)\leq =59881$, $R\left(2,12,5\right)\leq =60811$. Ниже приведён фрагмент вывода программы с указанием разбиений приведённых чисел и разложений их слагаемых на простые множители. При поиске был расширен диапазон наборов простых чисел $d\_{ij}$, но с ограничением $c\_{i}=1$, что в соответствующих случаях приводит лишь к оценкам сверху.





























































































































Приведённый способ поиска может привести к нахождению значений $R(k,m,n)$ при малых значений аргументов.