**Задача 209 (5 баллов)**

***Решение***: Из равенства

(1)

делаем вывод, что в системе счисления с основанием , число записывается тремя единицами. Представление (1) наводит на мысль искать решения в натуральных числах уравнения

, (2)

а затем среди них выделять те, для которых кратно 7. Проделаем это.

После замены уравнение (2) примет вид

(3)

Определим последовательности рекуррентно:

(4)

***Утверждение 1.*** При каждом число нечётно, а число чётно. Кроме того, .

***Доказательство.*** Воспользуемся методом математической индукции.

При утверждение выполнено. Действительно, .

Предположим, при число нечётно, а число чётно, и . Тогда, с учётом (4), заключаем, что также нечётно, а число чётно, далее имеем .

***Утверждение 2.*** При каждом число кратно 7.

***Доказательство.*** Поскольку , , , то из (4) следует , , а так как то

А при получаем

А с учётом утверждения 1 имеем . Таким образом, . Также получаем И, наконец, подставляя в равенство (3) получаем

***Утверждение 3.*** При каждом справедливо равенство

(5)

Из равенства (5) следует такое Далее, *,* откуда . Таким образом, из равенства (5) следует, что в системе счисления с основанием число, записанное тремя цифрами , равно точному кубу, а именно, кубу числа . Значит, при каждом неотрицательном целом цифра является третькубом в системе счисления с основанием .

Требуемое в задаче доказано.

Для спортивного интереса укажем окончательные формулы для вычисления членов последовательностей

Приведём первые 11 членов каждой последовательности













































Заметим, что указанный способ не единственный для получения третькубов, являющимися однозначными числами, то есть цифрами.

1. Легко понять, что , из чего следует, что третькубами являются числа-цифры в системе счисления с основанием .
2. Строим последовательности по формулам (4) с начальными условиями

*.*

Тогда при и поэтому

.

И, таким образом, числа-цифры , а также, числа-цифры являются третькубами в системе счисления с основанием .