**Задача 209 (5 баллов)**

***Решение***: Из равенства

 $7^{3}=343=18^{2}+18+1$ (1)

делаем вывод, что в системе счисления с основанием $18$, число $343$ записывается тремя единицами. Представление (1) наводит на мысль искать решения в натуральных числах уравнения

$x^{2}+x+1=7y^{2}$, (2)

а затем среди них выделять те, для которых $y$ кратно 7. Проделаем это.

После замены $t=2x+1, p=2y$ уравнение (2) примет вид

$t^{2}+3=7p^{2}$ (3)

Определим последовательности $\left\{t\_{n}\right\},\{p\_{n}\}$ рекуррентно: $t\_{0}=37,p\_{0}=14$

$\left\{\begin{array}{c}t\_{n+1}=127t\_{n}+336p\_{n}\\p\_{n+1}=48t\_{n}+127p\_{n}\end{array}\right.$ (4)

***Утверждение 1.*** При каждом $n\in N∪\{0\}$ число $t\_{n}$ нечётно, а число $p\_{n}$ чётно. Кроме того, $t\_{n}^{2}+3=7p\_{n}^{2}$.

***Доказательство.*** Воспользуемся методом математической индукции.

При $n=0$ утверждение выполнено. Действительно, $37-нечётно, 14-чётно, кроме того, 37^{2}+3=1372=7∙14^{2}$.

Предположим, при $ n=k$ число $t\_{n}$ нечётно, а число $ p\_{n}$ чётно, и $t\_{k}^{2}+3=7p\_{k}^{2}$. Тогда, с учётом (4), заключаем, что также $t\_{n+1}$ нечётно, а число $ p\_{n+1}$ чётно, далее имеем $t\_{k+1}^{2}+3-7p\_{k+1}^{2}=\left(127t\_{k}+336p\_{k}\right)^{2}+3-7\left(48t\_{k}+127p\_{k}\right)^{2}=t\_{k}^{2}+3-7p\_{k}^{2}=0$.

***Утверждение 2.*** При каждом $n=7m, m\in N∪\{0\}$ число $p\_{n}$ кратно 7.

***Доказательство.*** Поскольку $127≡1 mod 7$, $336≡0 mod 7$, $48≡6 mod 7$, то из (4) следует $t\_{n+1}≡t\_{n} mod 7$, $p\_{n+1}≡(-t\_{n}+p\_{n})mod 7$, а так как $t\_{0}≡2 mod 7, p\_{0}≡0 mod 7, $ то $t\_{n}≡2 mod 7, $ $p\_{n}≡\left(-2n\right)mod 7. $

А при $n=7m, m\in N∪\{0\}$ получаем $p\_{n}≡0 mod 7.$

 А с учётом утверждения 1 имеем $p\_{n}≡0 mod 14$. Таким образом, $z\_{m}:=\frac{p\_{7m}}{14}\in Z$. Также получаем $u\_{m}:=\frac{t\_{7m}-1}{2}\in Z.$ И, наконец, подставляя $t\_{7m}=1+2u\_{m}, p\_{7m}=14z\_{m}$ в равенство (3) получаем

***Утверждение 3.*** При каждом $m\in N∪\{0\}$ справедливо равенство

 $u\_{m}^{2}+u\_{m}+1=343z\_{m}^{2}$ (5)

Из равенства (5) следует такое $z\_{m}(u\_{m}^{2}+u\_{m}+1)=(7z\_{m})^{3}. $Далее,$z\_{m}^{2}=\frac{u\_{m}^{2}+u\_{m}+1}{343}\leq \frac{3u\_{m}^{2}}{343}<u\_{m}^{2}$*,* откуда $z\_{m}<u\_{m}$. Таким образом, из равенства (5) следует, что в системе счисления с основанием $u\_{m}$ число, записанное тремя цифрами $z\_{m}$, равно точному кубу, а именно, кубу числа $7z\_{m}$. Значит, при каждом неотрицательном целом $m$ цифра $z\_{m}$ является третькубом в системе счисления с основанием $u\_{m}$.

Требуемое в задаче доказано.

Для спортивного интереса укажем окончательные формулы для вычисления членов последовательностей $\left\{u\_{m}\right\}, \left\{z\_{m}\right\}.$

$$A=\left(\begin{matrix}127&336\\48&127\end{matrix}\right)$$

$$B=A^{7}=\left(\begin{matrix}34100354867927167&90221058599586096\\12888722657083728&34100354867927167\end{matrix}\right)$$

$$\left(\begin{matrix}1+2u\_{m+1}\\14z\_{m+1}\end{matrix}\right)=B\left(\begin{matrix}1+2u\_{m}\\14z\_{m}\end{matrix}\right)$$

$$\left(\begin{matrix}u\_{0}\\z\_{0}\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}18\\1\end{matrix}\right)$$

Приведём первые 11 членов каждой последовательности













































Заметим, что указанный способ не единственный для получения третькубов, являющимися однозначными числами, то есть цифрами.

1. Легко понять, что $17z\_{m}<u\_{m}$, из чего следует, что третькубами являются числа-цифры $2z\_{m}$ в системе счисления с основанием $u\_{m}$.
2. Строим последовательности $\left\{t\_{n}\right\},\{p\_{n}\}$ по формулам (4) с начальными условиями

$\left(\begin{matrix}t\_{0}\\p\_{0}\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}5\\2\end{matrix}\right)$*.*

Тогда при $n≡6 mod 7:$ $x\_{n}=\frac{t\_{n}-1}{2}\in Z,$ $y\_{n}=\frac{p\_{n}}{14}\in Z$ и поэтому

$x\_{n}^{2}+x\_{n}+1=343y\_{n}^{2}$.

 И, таким образом, числа-цифры $ y\_{n}$, а также, числа-цифры $ 2y\_{n}$ являются третькубами в системе счисления с основанием $x\_{n}$.