**Задача 210 (5 баллов)**

***Решение***: (К решению прилагается файл с построениями и вычислениями в Geogebra)

Углы в треугольнике, противолежащие сторонам $a,b,c$, обозначим через $α,β,γ$, а площадь треугольника - через $S.$ Остальные обозначения сохраняем из условия.

$$i) a<b⇒h\_{a}=\frac{2S}{a}>h\_{b}=\frac{2S}{b}$$

$$ii) a<b⇒m\_{a}=\sqrt{\frac{2b^{2}+2c^{2}-a^{2}}{4}}>m\_{b}=\sqrt{\frac{2a^{2}+2c^{2}-b^{2}}{4}}$$

$$iii) a<b⇒α<β⇒cos\frac{α}{2}>cos\frac{β}{2}>0⇒b\_{a}=\frac{2cos\frac{α}{2}}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}>b\_{b}=\frac{2cos\frac{β}{2}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{c}}$$

Таким образом, высота, медиана и биссектриса, проведённые к более короткой стороне, длиннее высоты, медианы и биссектрисы, проведённой к более длинной стороне. А для разностороннего треугольника при $a<b<c$

$$h\_{c}<h\_{b}<h\_{a}$$

$ b\_{c}<b\_{b}<b\_{a}$ (1)

$$m\_{c}<m\_{b}<m\_{a}$$

Также для разностороннего треугольника выполнены неравенства

$$h\_{a}<b\_{a}<m\_{a}$$

$h\_{b}<b\_{b}<m\_{b}$ (2)

$$h\_{c}<b\_{c}<m\_{c}$$

Понятно, что наименьшая из 9-ти длин высот, биссектрис и медиан это длина высоты $h\_{c}$, а наибольшая – длина медианы $m\_{c}$.

Для значения $h\_{b}$ из неравенств (1), (2) следуют $h\_{c}<h\_{b}<h\_{a},b\_{b},b\_{a},m\_{b},m\_{a}$ и возможные различные упорядочивания следующих пар $\left(h\_{b},b\_{c}\right), \left(h\_{b},m\_{c}\right)$.

Для значения $h\_{a}$ из неравенств (1), (2) следуют $h\_{c},h\_{b}<h\_{a}<b\_{a},m\_{a}$ и возможные различные упорядочивания следующих пар $\left(h\_{a},b\_{c}\right), \left(h\_{a},b\_{b}\right), \left(h\_{a},m\_{c}\right),\left(h\_{a},m\_{b}\right).$

Для значения $b\_{c}$ из неравенств (1), (2) следуют $h\_{c}<b\_{c}<b\_{b},b\_{a},m\_{c},m\_{b},m\_{a}$ и возможные различные упорядочивания следующих пар $\left(h\_{b},b\_{c}\right),\left(h\_{a},b\_{c}\right).$

Для значения $b\_{b}$ из неравенств (1), (2) следуют $h\_{c},h\_{b},b\_{c}<b\_{b}<b\_{a},m\_{b},m\_{a}$ и возможные различные упорядочивания следующих пар $\left(h\_{a},b\_{b}\right), \left(b\_{b},m\_{c}\right).$

Для значения $b\_{a}$ из неравенств (1), (2) следуют $h\_{c},h\_{b},h\_{a},b\_{c},b\_{b}<b\_{a}<m\_{a}$ и возможные различные упорядочивания следующих пар $\left(b\_{a},m\_{c}\right), \left(b\_{a},m\_{b}\right).$

Для значения $m\_{c}$ из неравенств (1), (2) следуют $h\_{c},b\_{c}<m\_{c}<m\_{b},m\_{a}$ и возможные различные упорядочивания следующих пар $\left(h\_{b},m\_{c}\right),\left(h\_{a},m\_{c}\right),$

$$\left(b\_{b},m\_{c}\right),\left(b\_{a},m\_{c}\right).$$

Для значения $m\_{b}$ из неравенств (1), (2) следуют $h\_{c},h\_{b},b\_{c},b\_{b},m\_{c}<m\_{b}<m\_{a}$ и возможные различные упорядочивания следующих пар $\left(h\_{a},m\_{b}\right), \left(b\_{a},m\_{b}\right).$

Таким образом, возможны различные упорядочивания следующих 9-ти пар

$$\left(h\_{b},b\_{c}\right), \left(h\_{b},m\_{c}\right),\left(h\_{a},b\_{c}\right), \left(h\_{a},b\_{b}\right), \left(h\_{a},m\_{c}\right),\left(h\_{a},m\_{b}\right),\left(b\_{b},m\_{c}\right), \left(b\_{a},m\_{c}\right), \left(b\_{a},m\_{b}\right).$$

Далее, без ограничения общности считаем, что $c=1$. Найдём аналитические зависимости переменных $a$ и $b$ в области $Ω=\left\{\left.(a,b)\right|0<a<b<1,a+b>1\right\}$ в случае, когда рассматриваемые чевианы, проведённые к разным сторонам, равны по длине. Понятно, что порядок упорядочивания в множестве $M$ может измениться при переходе от точки к точке только, если при таком переходе мы пересечём искомые кривые.

***1.Равенство высоты и медианы***

$h\_{b}=m\_{c}$**:** (3)

Используем формулу для длины медианы $m\_{с}=\sqrt{\frac{2a^{2}+2b^{2}-c^{2}}{4}}$, а также формулу для длины высоты $h\_{b}=\frac{2S}{b}$. А из формулы Герона следует $16S^{2}=\left(a+b+c\right)\left(a+b-c\right)\left(a-b+c\right)\left(-a+b+c\right)=2\left(a^{2}b^{2}+b^{2}c^{2}+c^{2}a^{2}\right)-a^{4}-b^{4}-c^{4}.$ Таким образом, из равенства (3) следует равенство

$3b^{2}c^{2}+2c^{2}a^{2}=a^{4}+3b^{4}+c^{4}$,

а при $c=1$ получаем

$ 3b^{2}+2a^{2}=a^{4}+3b^{4}+1.$ (4)

Таким образом, в области $Ω $точки, удовлетворяющие условию (3), образуют кривую $hbmc=\left\{\left.(a,b)\in Ω\right|3b^{2}+2a^{2}=a^{4}+3b^{4}+1\right\}$.

$h\_{a}=m\_{b}$**:** (5)

Действуя аналогично, получаем, что в области $Ω=\left\{\left.(a,b)\right|a<b<1,a+b>1\right\}$ точки, удовлетворяющие условию (5), образуют кривую $hamb=\left\{\left.(a,b)\in Ω\right|3a^{2}b^{2}+2b^{2}=3a^{4}+b^{4}+1\right\}$.

$h\_{a}=m\_{c}$**:** (6)

Действуя аналогично, получаем, что в области $Ω=\left\{\left.(a,b)\right|a<b<1,a+b>1\right\}$ точки, удовлетворяющие условию (5), образуют кривую $hamc=\left\{\left.(a,b)\in Ω\right|3a^{2}+2b^{2}=3a^{4}+b^{4}+1\right\}$.



Рисунок 1

На рисунке 1 показаны кривые, построенные в GeoGebra, здесь область $Ω$ это треугольник $ABC$, кривая $hbmc$ нарисована красным цветом,

$hamb-$малиновым цветом, а кривая $hamc$ - жёлтым цветом.

***2.Равенство высоты и биссектрисы***

$h\_{b}=b\_{c}$**:** (7)

Поскольку $h\_{b}=asinγ$, а $b\_{c}=\frac{2abcos\frac{γ}{2}}{a+b}$, то из равенства (7) следует равенство $\frac{b}{a+b}=sin\frac{γ}{2}$. А из теоремы косинусов следует $\frac{a^{2}+b^{2}-c^{2}}{2ab}=cosγ=1-2sin^{2}\frac{γ}{2}=1-2(\frac{b}{a+b})^{2}$ , и после преобразований получаем

$$a^{4}+b^{4}-2a^{2}b^{2}+4ab^{3}-a^{2}c^{2}-b^{2}c^{2}-2abc^{2}=0$$

 а при $c=1$ получаем

$$a^{4}+b^{4}-2a^{2}b^{2}+4ab^{3}-a^{2}-b^{2}-2ab=0$$

Таким образом, в области $Ω$ точки, удовлетворяющие условию (7), образуют кривую $hbbc=\left\{\left.(a,b)\in Ω\right| a^{4}+b^{4}-2a^{2}b^{2}+4ab^{3}-a^{2}-b^{2}-2ab=0\right\}$.

$h\_{a}=b\_{c}$**:**  (8)

Действуя аналогично, получаем, что в области $Ω $точки, удовлетворяющие условию (8), образуют кривую $habc=\left\{\left.(a,b)\in Ω\right| a^{4}+b^{4}-2a^{2}b^{2}+4ba^{3}-a^{2}-b^{2}-2ab=0\right\}$.

$h\_{a}=b\_{b}$**:**  (9)

Действуя аналогично, получаем, что в области $Ω $точки, удовлетворяющие условию (9), образуют кривую $habb=\left\{\left.(a,b)\in Ω\right|1+a^{4}-2a^{2}+4a^{3}--b^{2}-a^{2}b^{2}-2ab^{2}=0\right\}$.



Рисунок 2

На рисунке 2 показаны кривые, также построенные в GeoGebra, здесь область $Ω$ тот же треугольник $ABC$, кривая $hbbc$ нарисована синим цветом,

$habb-$голубым цветом, а кривая $habc$ не содержит точек из области $Ω$.

***3.Равенство биссектрисы и медианы***

$b\_{b}=m\_{c}$**:** (10)

Поскольку $b\_{b}=\frac{2accos\frac{β}{2}}{a+c}$, а $m\_{с}=\sqrt{\frac{2a^{2}+2b^{2}-c^{2}}{4}}$, то из равенства (10) следует равенство $8a^{2}c^{2}\left(1+cosβ\right)=\left(a+c\right)^{2}(2a^{2}+2b^{2}-c^{2})$. С учётом теоремы косинусов после преобразований получаем $2a^{4}-c^{4}-6ac^{3}+8acb^{2}+2a^{2}b^{2}-7a^{2}c^{2}+2b^{2}c^{2}=0$ . А при $c=1$ получаем

$2a^{4}-1-6a+8ab^{2}+2a^{2}b^{2}-7a^{2}+2b^{2}=0$.

Таким образом, в области $Ω$ точки, удовлетворяющие условию (10), образуют кривую $bbmc=\left\{\left.(a,b)\in Ω\right| 2a^{4}-1-6a+8ab^{2}+2a^{2}b^{2}-7a^{2}+2b^{2}=0\right\}$.

$b\_{a}=m\_{b}$**:**  (11)

Действуя аналогично, получаем, что в области $Ω $точки, удовлетворяющие условию (11), образуют кривую $bamb=\left\{\left.(a,b)\in Ω\right|2-b^{4}-6b^{3}+8ba^{2}+2a^{2}-7b^{2}+2a^{2}b^{2}=0\right\}$.

$b\_{a}=m\_{c}$**:**  (12)

Действуя аналогично, получаем, что в области $Ω $точки, удовлетворяющие условию (12), образуют кривую $bamс=\left\{\left.(a,b)\in Ω\right|b^{4}-1-6b+8ba^{2}+2a^{2}b^{2}-7b^{2}+2a^{2}=0\right\}$.



Рисунок 3

На рисунке 3 показаны кривые, также построенные в GeoGebra, здесь область $Ω$ тот же треугольник $ABC$, кривая $bbmc$ нарисована зелёным цветом,

$bamb-$салатовым цветом, а кривая $bamс$ не содержит точек из области $Ω$.

***4.Кривая*** $habc$

Рассмотрим в области$ Ω$ уравнение

$a^{4}+b^{4}-2a^{2}b^{2}+4ba^{3}-a^{2}-b^{2}-2ab=0$*,*

определяющее множество $habc.$ Поскольку в $Ω$ $(a+b)^{2}>4a^{2}$, а из очевидных неравенств $1-b^{2}>0, a\left(b-a\right)>0$ следует $1-b^{2}+ a\left(b-a\right)>0$, и как следствие $1-b^{2}+ a\left(b-a\right)+ab=1-(a-b)^{2}>ab$, то в результате получаем $4ba^{3}=-a^{4}-b^{4}+2a^{2}b^{2}+a^{2}+b^{2}+2ab=\left(a+b\right)^{2}\left(1-\left(a-b\right)^{2}\right)>4a^{2}ab=4ba^{3}$- противоречие. Так что множество $habc$ пусто. Таким образом, в разностороннем треугольнике всегда $h\_{a}>b\_{c}$.

***5.Кривая*** $bamc$

Рассмотрим в области$ Ω$ уравнение

$$2b^{4}-1-6b+8ba^{2}+2a^{2}b^{2}-7b^{2}+2a^{2}=0,$$

определяющее множество $bamc.$ Из этого равенства следует $1+6b+7b^{2}=2b^{4}+8ba^{2}+2a^{2}b^{2}+2a^{2}<\left[так как a<b\right]<4b^{4}+8b^{3}+2b^{2}=b^{4}+(3b^{4}+3b^{3})+\left(5b^{3}+2b^{2}\right)<\left[так как при 0<b<1, 0<β<α выполнено b^{α}<b^{β}\right]<1+6b+7b^{2}$ - противоречие. Так что множество $bamc$ пусто. Таким образом, в разностороннем треугольнике всегда $b\_{a}>m\_{c}$.

***6.Асимптотика возле углов***

Для понимания взаимного расположения кривых в окрестности угловых точек области $Ω$ найдём соответствующие асимптотические формулы

*В окрестности точки* $a=1,b=1$*:*

Для кривой $bamb$ вычисляем последовательно производные функции $F\left(a,b\right)=2-b^{4}-6b^{3}+8ba^{2}+2a^{2}-7b^{2}+2a^{2}b^{2}:$ $\frac{∂F}{∂a}\left(1,1\right)=24,\frac{∂F}{∂b}\left(1,1\right)=-24, \frac{∂^{2}F}{∂a^{2}}\left(1,1\right)=24,\frac{∂^{2}F}{∂a∂b}\left(1,1\right)=24,\frac{∂^{2}F}{∂b^{2}}\left(1,1\right)=-58$. И для неявно заданной функции получаем асимптотическую формулу

$a\_{1}\left(b\right)=1+\left(b-1\right)-\frac{7}{24}\left(b-1\right)^{2}+o(\left(b-1\right)^{2})$.

Действуя аналогично, получаем формулы для кривой $habb$:

$a\_{2}\left(b\right)=1+\left(b-1\right)-\frac{3}{8}\left(b-1\right)^{2}+o(\left(b-1\right)^{2})$,

для кривой $hamb$:

$a\_{3}\left(b\right)=1+\left(b-1\right)-\frac{4}{3}\left(b-1\right)^{2}+o(\left(b-1\right)^{2})$,

для кривой $hbmc$:

$b\_{1}\left(a\right)=1-\frac{2}{3}\left(a-1\right)^{2}+o(\left(a-1\right)^{2})$,

для кривой $hbbc$:

$b\_{2}\left(a\right)=1-\frac{3}{8}\left(a-1\right)^{2}+o(\left(a-1\right)^{2})$,

для кривой $bbmc$:

$b\_{3}\left(a\right)=1-\frac{7}{24}\left(a-1\right)^{2}+o(\left(a-1\right)^{2})$.

*В окрестности точки* $a=0,b=1$*:*

Действуя аналогично, получаем формулы для кривой $habb$:

$a\_{4}\left(b\right)=-\left(b-1\right)+o(\left(b-1\right)^{2})$,

для кривой $hbbc$:

$a\_{5}\left(b\right)=-\left(b-1\right)+4\left(b-1\right)^{2}+o(\left(b-1\right)^{2})$,

для кривой $hamc$:

$a\_{6}\left(b\right)=-\frac{4}{\sqrt{3}}\left(b-1\right)+O(\left(b-1\right)^{2})$,

для кривой $hamb$:

$a\_{7}\left(b\right)=-\frac{4}{\sqrt{3}}\left(b-1\right)+O(\left(b-1\right)^{2})$.

*В окрестности точки* $a=\frac{1}{2},b=\frac{1}{2}$*:*

Действуя аналогично, получаем формулы для кривой $hamc$:

$a\_{8}\left(b\right)=\frac{1}{2}-\left(b-\frac{1}{2}\right)+\frac{2}{3}\left(b-1\right)^{2}+o(\left(b-1\right)^{2})$,

для кривой $hbmc$:

$a\_{9}\left(b\right)=\frac{1}{2}-\left(b-\frac{1}{2}\right)+\frac{4}{3}\left(b-1\right)^{2}+o(\left(b-1\right)^{2})$.

 ***7. Анализ взаимного расположения кривых***

Используя полученную асимптотику, получаем в окрестности точки $a=1,b=1$:

$$a\_{1}\left(b\right)>a\_{2}\left(b\right)>a\_{3}\left(b\right)$$

$$b\_{1}\left(a\right)<b\_{2}\left(a\right)<b\_{3}\left(a\right).$$

В окрестности точки $a=0,b=1$, используя также формулы $a\_{6}^{2}=\frac{2(b^{2}-1)^{2}}{3+\sqrt{9-12(b^{2}-1)^{2}}}$ , $a\_{7}^{2}=\frac{2(b^{2}-1)^{2}}{3b^{2}+\sqrt{9b^{4}-12(b^{2}-1)^{2}}}$ , получаем

$a\_{7}\left(b\right)>a\_{6}\left(b\right)>a\_{5}\left(b\right)>a\_{4}\left(b\right)$*.*

В окрестности точки $a=\frac{1}{2},b=\frac{1}{2}$, используя полученную асимптотику, получаем

$a\_{8}\left(b\right)<a\_{9}\left(b\right)$*.*

Анализируя поведение кривых с помощью Geobra (рисунки 4,5,6,7) и учитывая полученные асимптотические формулы, находим, что в области $Ω$ кривые имеют следующие точки пересечения

$$K\_{2}=hbbc∩bbmc$$

$$R\_{2}=hbbc∩hamb$$

$$Z\_{2}=hbbc∩hamc$$

$$I\_{1}=bbmc∩hamb$$

$A\_{1}=bbmc∩habb∩hamc$ (13)

$$I=hbmc∩hamb$$

$$Q=hbmc∩habb$$

$$Q\_{1}=hbmc∩bamb$$

$$B\_{2}=hamc∩bamb$$

Укажем координаты этих точек, вычисленные в Geogebra

* K\_2 = (0.9755367283, 0.7056050716)
* R\_2 = (0.9661077008, 0.0398558468)
* Z\_2 = (0.9718219303, 0.0320953503)
* I\_1 = (0.8309942757, 0.223197188)
* A\_1 = (0.817959597, 0.194801376)
* I = (0.755928946, 0.377964473)
* Q = (0.7120232157, 0.3661405679)
* Q\_1 = (0.5627409644, 0.4407764518)
* B\_2 = (0.5621706797, 0.4396599456)

Также образуются точки пересечения прямой $a+b=1$ и кривых $bbmc$, $bamb$ – соответственно точки

* H\_3 = (0.8138593384, 0.1861406616)

и

 E\_3 = (0.5615528128, 0.4384471872).

******

Рисунок 4

******

Рисунок 5



Рисунок 6



Рисунок 7

***8.Классификация невырожденных разносторонних треугольников***

Анализ взаимного расположения кривых показывает, что рассматриваемые кривые разбивают область $Ω$ на 18 связных частей, каждой из которых соответствует определённое упорядочивание элементов множества $M$, состоящего ровно из 9-ти элементов. Перечислим упорядочивания в некотором лексикографическом порядке, и при этом указываем пример треугольника из соответствующего класса с вычисленными в Maple значениями длин высот, биссектрис и медиан.

1. $h\_{c}<h\_{b}<b\_{c}<b\_{b}<h\_{a}<m\_{c}<m\_{b}<b\_{a}<m\_{a}$

 





















1. $h\_{c}<h\_{b}<b\_{c}<b\_{b}<m\_{c}<h\_{a}<m\_{b}<b\_{a}<m\_{a}$

 





















1. $h\_{c}<h\_{b}<b\_{c}<b\_{b}<m\_{c}<m\_{b}<h\_{a}<b\_{a}<m\_{a}$

 





















1. $h\_{c}<h\_{b}<b\_{c}<m\_{c}<b\_{b}<m\_{b}<h\_{a}<b\_{a}<m\_{a}$

 





















1. $ h\_{c}<b\_{c}<h\_{b}<h\_{a}<b\_{b}<m\_{c}<m\_{b}<b\_{a}<m\_{a}$

$ $ 





















1. $h\_{c}<b\_{c}<h\_{b}<h\_{a}<m\_{c}<b\_{b}<b\_{a}<m\_{b}<m\_{a}$

 





















1. $h\_{c}<b\_{c}<h\_{b}<h\_{a}<m\_{c}<b\_{b}<m\_{b}<b\_{a}<m\_{a}$

 





















1. $h\_{c}<b\_{c}<h\_{b}<b\_{b}<h\_{a}<m\_{c}<m\_{b}<b\_{a}<m\_{a}$

 





















1. $h\_{c}<b\_{c}<h\_{b}<b\_{b}<m\_{c}<h\_{a}<m\_{b}<b\_{a}<m\_{a}$

 





















$$ 10)h\_{c}<b\_{c}<h\_{b}<b\_{b}<m\_{c}<m\_{b}<h\_{a}<b\_{a}<m\_{a}$$























11)$ h\_{c}<b\_{c}<h\_{b}<m\_{c}<h\_{a}<b\_{b}<b\_{a}<m\_{b}<m\_{a}$























 12) $h\_{c}<b\_{c}<h\_{b}<m\_{c}<h\_{a}<b\_{b}<m\_{b}<b\_{a}<m\_{a}$























 13) $h\_{c}<b\_{c}<h\_{b}<m\_{c}<b\_{b}<h\_{a}<m\_{b}<b\_{a}<m\_{a}$























 14) $h\_{c}<b\_{c}<h\_{b}<m\_{c}<b\_{b}<m\_{b}<h\_{a}<b\_{a}<m\_{a}$























 15) $h\_{c}<b\_{c}<m\_{c}<h\_{b}<h\_{a}<b\_{b}<b\_{a}<m\_{b}<m\_{a}$























 16) $h\_{c}<b\_{c}<m\_{c}<h\_{b}<h\_{a}<b\_{b}<m\_{b}<b\_{a}<m\_{a}$























 17)$ h\_{c}<b\_{c}<m\_{c}<h\_{b}<b\_{b}<h\_{a}<m\_{b}<b\_{a}<m\_{a}$























 18) $h\_{c}<b\_{c}<m\_{c}<h\_{b}<b\_{b}<m\_{b}<h\_{a}<b\_{a}<m\_{a}$























В точках дуг найденных семи кривых соответствующие множества состоят из 8-ми элементов. Каждой такой дуге без крайних точек, а всего их 26, соответствует своё упорядочивание элементов множества $M$.

 Дуги кривой $hbbc:$

19) $\breve{CZ\_{2}}$

20) $\breve{Z\_{2}R\_{2}}$

21) $\breve{R\_{2}K\_{2}}$

22) $ \breve{K\_{2}B}$

Дуги кривой $hamb:$

23) $\breve{CR\_{2}}$

24) $\breve{R\_{2}I\_{1}}$

25) $\breve{I\_{1}I}$

26) $\breve{IB}$

Дуги кривой $hamc:$

27) $\breve{CZ\_{2}}$

28) $\breve{Z\_{2}A\_{1}}$

29) $\breve{A\_{1}B\_{2}}$

30) $\breve{B\_{2}A}$

Дуги кривой $habb:$

31) $\breve{CA\_{1}}$

32) $\breve{A\_{1}Q}$

33) $\breve{QB}$

Дуги кривой $hbmc:$

34) $\breve{AQ\_{1}}$

35) $\breve{Q\_{1}Q}$

36) $\breve{QI}$

37) $\breve{IB}$

Дуги кривой $bamb:$

38) $\breve{BQ\_{1}}$

39) $\breve{Q\_{1}B\_{2}}$

40) $\breve{B\_{2}E\_{3}}$

Дуги кривой $bbmc:$

41) $\breve{BK\_{2}}$

42) $\breve{K\_{2}I\_{1}}$

43) $\breve{I\_{1}A\_{1}}$

44) $\breve{A\_{1}H\_{3}}$

 А в 9-ти точках (13) пересечений кривых соответствующие множества состоят из 7-ми элементов, и каждому из них соответствует своё упорядочивание элементов множества длин высот, биссектрис и медиан.

***9.Невырожденный равносторонний треугольник***

При $a=b=c$ все высоты, биссектрисы и медианы равны между собой и множество $M$ содержит один элемент.

***10.Невырожденный равнобедренный треугольник***

$a=b<c$***:***

Как известно, высота, проведённая к основе равнобедренного треугольника, является медианой и биссектрисой, так что $h\_{c}=b\_{c}=m\_{c}$. Понятно, что высоты, проведённые к боковым сторонам равны $h\_{a}=h\_{b}$, также равны биссектрисы, проведённые к боковым сторонам, $b\_{a}=b\_{b}$, и равны медианы, проведённые к боковым сторонам, $m\_{a}=m\_{b}$. Кроме того, $h\_{a}<b\_{a}<m\_{a}$. А из пункта $i) $следует, что$h\_{c}<h\_{a}$. В этом случае имеем следующее упорядочивание

$$h\_{c}=b\_{c}=m\_{c}<h\_{a}=h\_{b}<b\_{a}=b\_{b}<m\_{a}=m\_{b},$$

и множество $M$ содержит 4 элемента.

$a<b=c$***:***

Аналогично получаем сначала $h\_{a}=b\_{a}=m\_{a}$, а затем $h\_{b}=h\_{c},b\_{b}=b\_{c},m\_{b}=m\_{c}$. Кроме того, $h\_{b}<b\_{b}<m\_{b}$. А из пункта $i) $следует, что$m\_{b}<m\_{a}$. В этом случае имеем следующее упорядочивание

$h\_{b}=h\_{c}<b\_{b}=b\_{c}<m\_{b}=m\_{c}<h\_{a}=b\_{a}=m\_{a}$,

и множество $M$ содержит 4 элемента.

***11. Невырожденный треугольник***

Суммируя всё выше изложенное, получаем

* 1. Количество элементов в множестве $M$ может принимать значения:1,4,7,8,9
	2. В случае $a<b<c$, когда множество $M$ содержит 9 элементов существует всего 18 классов упорядочивания элементов множества $M$
	3. В общем случае $a\leq b\leq c$ существует всего 56 классов упорядочивания элементов множества $M$, среди которых 18 классов упорядочивания 9-тиэлементных множеств $M$, 26 классов упорядочивания 8-миэлементных множеств $M$, 9 классов упорядочивания 7-миэлементных множеств $M$, 2 класса упорядочивания 4-хэлементных множеств $M$, 1 класс упорядочивания 1-элементного множеств $M$,

***12. Вырожденный треугольник***

Если три различные точки лежат на одной прямой, то в нашем случае $a+b=c=1,a\leq b$. Высоты, понятно, равны нулю. Для медиан тоже всё ясно: $m\_{c}=\frac{1}{2}-a,m\_{a}=1-\frac{a}{2},m\_{b}=1-\frac{b}{2}$ . Под биссектрисой будем понимать предельное положение соответствующей биссектрисы при вырождении треугольника. Тогда $b\_{c}=0,b\_{b}=a+\frac{ba}{a+1},b\_{a}=b+\frac{ba}{b+1}.$

Дуге $\breve{AE\_{3}}$ соответствует упорядочивание 6-тиэлементного множества $M$

$$0=h\_{a}=h\_{b}=h\_{c}=b\_{c}<m\_{c}<b\_{b}<b\_{a}<m\_{b}<m\_{a}$$

Дуге $\breve{E\_{3}H\_{3}}$ соответствует упорядочивание 6-тиэлементного множества $M$

$$0=h\_{a}=h\_{b}=h\_{c}=b\_{c}<m\_{c}<b\_{b}<m\_{b}<b\_{a}<m\_{a}$$

Дуге $\breve{H\_{3}C}$ соответствует упорядочивание 6-тиэлементного множества $M$

$$0=h\_{a}=h\_{b}=h\_{c}=b\_{c}<b\_{b}<m\_{c}<m\_{b}<b\_{a}<m\_{a}$$

Точке $A$ соответствует упорядочивание 3-xэлементного множества $M$

$$0=h\_{a}=h\_{b}=h\_{c}=b\_{c}=m\_{c}<b\_{b}=b\_{a}<m\_{b}=m\_{a}$$

Точке $E\_{3}$ соответствует упорядочивание 5-тиэлементного множества $M$

$$0=h\_{a}=h\_{b}=h\_{c}=b\_{c}<m\_{c}<b\_{b}<b\_{a}=m\_{b}<m\_{a}$$

Точке $H\_{3}$ соответствует упорядочивание 5-тиэлементного множества $M$

$$0=h\_{a}=h\_{b}=h\_{c}=b\_{c}<m\_{c}=b\_{b}<m\_{b}<b\_{a}<m\_{a}$$

***13. Треугольник, допускающий вырождение***

Суммируя всё выше изложенное, получаем

* 1. Количество элементов в множестве $M$ может принимать значения:1,3,4,5,6,7,8,9
	2. В случае $a<b<c$, когда множество $M$ содержит 9 элементов существует всего 18 классов упорядочивания элементов множества $M$ (ничего нового по сравнению с невырожденным случаем)
	3. В общем случае $a\leq b\leq c$ существует всего 62 класса упорядочивания элементов множества $M$, среди которых в дополнение к уже перечисленным для невырожденного случая есть 3 класса упорядочивания 6-тиэлементных множеств $M$, 2 класса упорядочивания 5-тиэлементных множеств $M$, 1 класс упорядочивания 3-хэлементного множеств $M$.

***14. Выводы***

Сделаем некоторые выводы

1. Пары сопоставления длин высота-медиана даёт большее многообразие, чем обе другие пары.
2. Навскидку, самый популярный класс - 18, самые маловероятные среди 9-тиэлементных – 1, 2,4,11 – для них подобрать представителей вручную практически невозможно.
3. Сомнительным для анализа и включения в классификацию выглядит случай вырождения треугольника при совпадении двух вершин – в этом случае однозначно невозможно определить высоту на “короткую” сторону даже при применении аппроксимации невырожденными треугольниками
4. Также в случае вырождения треугольника в точку – те же соображения, хотя включение в классификацию этого случая не влияет на ответы.
5. Можно исследовать классификацию, включая длины сторон, радиусы описанной, вписанной и вневписанных окружностей – не отбирая у ведущего хлеб, после некоторых колебаний я не стал делать обобщение в эту сторону.
6. Можно обобщить задачу на трёхмерный случай, и при этом классифицировать по линейным элементам или по плоским – те же соображения, что и в предыдущем пункте.
7. Объем задачи с полным обоснованием тянет на хороший раздел книги – эта задача точно бьёт все рекорды.