***Задача 212 (5 баллов)***

***Ответ:*** Показано, что любой выпуклый многогранник с 2016 вершинами можно разрезать на тетраэдров при каждом целом Получены соответствующие оценки для всех .

***Решение:***

Пусть задан некоторый выпуклый многогранник с вершинами. Каждую его грань некоторым образом диагоналями разобьём на треугольники. Обозначим через количество рёбер и количество граней полученной триангуляции поверхности многогранника . Заметим, что новых вершин не образовалось, поэтому и количество вершин триангуляции равно количеству вершин многогранника . Из теоремы Эйлера следует

(1)

Каждая грань триангуляции имеет по три стороны, а каждое ребро является стороной для двух граней. Получаем

(2)

Из (1) и (2) следует

(3)

(4)

Пусть с той вершиной триангуляции инцидентно рёбер. При подсчёте общего количество степеней вершин каждое ребро учитывается два раза. Получаем

а с учётом (4) получаем

. (5)

Если для всех вершин то из (5) следует 3, и значит, .

Если для всех вершин то из (5) следует 4, и значит, .

Если для всех вершин то из (5) следует 5, и значит, .

Таким образом, при найдётся вершина триангуляции , степень которой не меньше 4, при найдётся вершина триангуляции , степень которой не меньше 5, а при найдётся вершина триангуляции , степень которой не меньше 6.

Перейдём к построению разбиения многогранника на тетраэдры. Выберем вершину триангуляции с наибольшей степенью . Рассмотрим все треугольные пирамиды с вершиной и основаниями, являющимися гранями триангуляции не содержащими вершину . Таких пирамид ровно . Понятно, что такие пирамиды попарно не имеют внутренних точек, а в объединении дают исходный многогранник. Таким образом, построено разбиение многогранника на тетраэдров.

Через обозначим наименьшее количество тетраэдров в разбиении многогранника на тетраэдры. А через - максимальное значение для всех выпуклых многогранников , имеющих ровно вершин.

Из предыдущего следует оценка

Для данной задачи важна именно верхняя оценка для . Несложно получить и простейшую нижнюю оценку. Рассмотрим разбиение на тетраэдры пирамиды с вершинами. В основании пирамиды – многоугольник с вершиной. Рассмотрим тетраэдры гранями примыкающие к основанию пирамиды, совокупность этих граней образует разбиение многоугольника на треугольники. Поскольку сумма всех углов треугольников не меньше суммы углов – угольника , которая равна , а сумма углов треугольника равна , то отсюда следует, что тетраэдров, примыкающих к основанию не меньше . И общее количество тетраэдров также не меньше .

Таким образом,

.

Интересно, что такая же оценка справедлива для ***каждого*** разбиения, являющегося триангуляцией (следует из соотношения Эйлера для симплицифицированных комплексов).

В таблице для начальных значений указаны нижняя и верхняя оценки для :

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
| 4 | 1 | 1 |
| 5 | 2 | 2 |
| 6 | 3 | 4 |
| 7 | 4 | 5 |
| 8 | 5 | 7 |
| 9 | 6 | 9 |
| 10 | 7 | 11 |
| 11 | 8 | 13 |
| 12 | 9 | 15 |
| 13 | 10 | 16 |
| 14 | 11 | 18 |
| 15 | 12 | 20 |
| 16 | 13 | 22 |
| 17 | 14 | 24 |
| 18 | 15 | 26 |
| 19 | 16 | 28 |
| 20 | 17 | 30 |

Таким образом, доказано что, при выполняется неравенство

.

Имея разбиение многогранника на тетраэдров, можно построить разбиение на тетраэдр. Для этого берём некоторый тетраэдр разбиения и разбиваем его, например, биссекторной плоскостью двугранного угла при одном из рёбер на два тетраэдра. Количество тетраэдров при этом увеличилось на 1.

Таким образом, доказано, ***что любой выпуклый многогранник с вершинами можно разрезать на тетраэдров при каждом***

Более детальный анализ позволяет уточнить нижнюю оценку. Пока без доказательства приведём улучшенную оценку, например, для :