***Задача 212 (5 баллов)***

***Ответ:*** Показано, что любой выпуклый многогранник с $ n=$2016 вершинами можно разрезать на $k$ тетраэдров при каждом целом $k\geq 4022.$ Получены соответствующие оценки для всех $n\geq 4$.

***Решение:***

Пусть задан некоторый выпуклый многогранник $P$ с $ n$ вершинами. Каждую его грань некоторым образом диагоналями разобьём на треугольники. Обозначим через $m и f$ количество рёбер и количество граней полученной триангуляции $T$ поверхности многогранника $P$. Заметим, что новых вершин не образовалось, поэтому и количество вершин триангуляции $T$ равно количеству вершин многогранника $P$. Из теоремы Эйлера следует

$n+f=m+2.$(1)

Каждая грань триангуляции $T$ имеет по три стороны, а каждое ребро является стороной для двух граней. Получаем

$2m=3f.$ (2)

Из (1) и (2) следует

$f=2\left(n-2\right),$ (3)

$m=3\left(n-2\right).$ (4)

Пусть с $i-$той вершиной триангуляции $T$ инцидентно $α\_{i}$ рёбер. При подсчёте общего количество степеней вершин каждое ребро учитывается два раза. Получаем

$$\sum\_{i=1}^{n}α\_{i}=2m,$$

а с учётом (4) получаем

$\sum\_{i=1}^{n}α\_{i}=6n-12$. (5)

Если для всех вершин $α\_{i}\leq 3,$ то из (5) следует 3$n\geq 6n-12$, и значит, $n=4$.

Если для всех вершин $α\_{i}\leq 4,$ то из (5) следует 4$n\geq 6n-12$, и значит, $n\leq 6$.

Если для всех вершин $α\_{i}\leq 5,$ то из (5) следует 5$n\geq 6n-12$, и значит, $n\leq 12$.

Таким образом, при $n=5,6$ найдётся вершина триангуляции $T$, степень которой не меньше 4, при $n=7,…,12$ найдётся вершина триангуляции $T$, степень которой не меньше 5, а при $n\geq 13$ найдётся вершина триангуляции $T$, степень которой не меньше 6.

Перейдём к построению разбиения многогранника $P$ на тетраэдры. Выберем вершину $A$ триангуляции $T$ с наибольшей степенью $δ$. Рассмотрим все треугольные пирамиды с вершиной $A$ и основаниями, являющимися гранями триангуляции $T, $ не содержащими вершину $A$. Таких пирамид ровно $f-δ=2n-4-δ$. Понятно, что такие пирамиды попарно не имеют внутренних точек, а в объединении дают исходный многогранник. Таким образом, построено разбиение многогранника на $2n-4-δ$ тетраэдров.

Через $S(P)$ обозначим наименьшее количество тетраэдров в разбиении многогранника $P$ на тетраэдры. А через $S\_{n}$ - максимальное значение $S(P)$ для всех выпуклых многогранников $P$, имеющих ровно $n$ вершин.

Из предыдущего следует оценка

$$S\_{n}\leq M\_{n}=\left\{\begin{array}{c}2n-7=1,n=4,\\2n-8, 5\leq n\leq 6,\\2n-9, 7\leq n\leq 12,\\2n-10, n\geq 13.\end{array}\right.$$

Для данной задачи важна именно верхняя оценка для $S\_{n}$. Несложно получить и простейшую нижнюю оценку. Рассмотрим разбиение на тетраэдры пирамиды с $n$ вершинами. В основании пирамиды – многоугольник $M$ с $(n-1)$ вершиной. Рассмотрим тетраэдры гранями примыкающие к основанию пирамиды, совокупность этих граней образует разбиение многоугольника $M$ на треугольники. Поскольку сумма всех углов треугольников не меньше суммы углов $(n-1)$ – угольника $M$, которая равна $π(n-3)$, а сумма углов треугольника равна $π$, то отсюда следует, что тетраэдров, примыкающих к основанию не меньше $n-3$. И общее количество тетраэдров также не меньше $n-3$.

Таким образом,

$S\_{n}\geq m\_{n}=n-3$.

Интересно, что такая же оценка справедлива для ***каждого*** разбиения, являющегося триангуляцией (следует из соотношения Эйлера для симплицифицированных комплексов).

В таблице для начальных значений $n$ указаны нижняя и верхняя оценки для $S\_{n}$:

$$m\_{n}\leq S\_{n}\leq M\_{n}$$

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| $$n$$ | $$m\_{n}$$ | $$M\_{n}$$ |
| 4 | 1 | 1 |
| 5 | 2 | 2 |
| 6 | 3 | 4 |
| 7 | 4 | 5 |
| 8 | 5 | 7 |
| 9 | 6 | 9 |
| 10 | 7 | 11 |
| 11 | 8 | 13 |
| 12 | 9 | 15 |
| 13 | 10 | 16 |
| 14 | 11 | 18 |
| 15 | 12 | 20 |
| 16 | 13 | 22 |
| 17 | 14 | 24 |
| 18 | 15 | 26 |
| 19 | 16 | 28 |
| 20 | 17 | 30 |

Таким образом, доказано что, при $n=2016$ выполняется неравенство

$2013\leq S\_{2016}\leq 4022$.

Имея разбиение многогранника на $k $тетраэдров, можно построить разбиение на $(k+1) $тетраэдр. Для этого берём некоторый тетраэдр разбиения и разбиваем его, например, биссекторной плоскостью двугранного угла при одном из рёбер на два тетраэдра. Количество тетраэдров при этом увеличилось на 1.

Таким образом, доказано, ***что любой выпуклый многогранник с*** $ n$ ***вершинами можно разрезать на*** $k$ ***тетраэдров при каждом*** $k\geq M\_{n}.$

Более детальный анализ позволяет уточнить нижнюю оценку. Пока без доказательства приведём улучшенную оценку, например, для $n=4n\_{1}$:

$$S\_{n}\geq 5\left(n\_{1}-1\right).$$