***Задача 213 (5 баллов)***

***Ответ:***

1. . Показано, что количество многогранников, для которых достигается минимум, конечно. Найдены все значения, которые может принимать наибольшее количество сторон у грани такого многогранника.

2. Да, могут. Причём таких многогранников конечное число. Найдены все такие многогранники. Дан ответ на вопрос и в более общей задаче. Получена оценка для максимально возможного количества сторон грани многогранника в общем случае.

***Решение:***

***1.*** Пусть для многогранника вектор имеет вид , где . В множестве могут находиться только целые числа от до то есть всего не больше чисел. Так что . С другой стороны, грань, имеющая сторон, понятно, соседствует с другими гранями, поэтому И, таким образом, , а в результате .

Далее, для тетраэдра .

Для четырёхугольной пирамиды

Для треугольной призмы .

Мы доказали, что полученная оценка точна, и, таким образом,

Покажем, что число таких многогранников, для которых , конечно.

Предположим, для многогранника . Пусть для многогранника вектор имеет вид Тогда в оценках и неравенства переходят в равенство. Так что, и Воспользуемся неравенством (4), выполняющимся для любого выпуклого многогранника. Из него следует 6. А с учётом (2) получаем: .

Далее, возьмём три грани, имеющие наибольшее количество сторон, то есть . Они могут иметь попарно не больше, чем по две общие вершины. Поэтому у многогранника есть, по крайней мере, различных вершин. А, так как , то для количества вершин получаем: . Из формулы Эйлера для количества рёбер получаем Сопоставляя две полученные оценки и , получаем Из ограниченности понятно, следует, что множество векторов , конечно. Для каждого набора имеем конечное число многогранников. В результате, и ***множество всех многогранников, для которых , конечно.***

Кроме того, ***установлена оценка для наибольшего количества сторон у грани такого многогранника*** . Оценка точна, что доказывает следующий многогранник с вектором

Приведём примеры многогранников с :

и с :

С учётом приведённых ранее примеров многогранников с получаем, что, ***наибольшее количество сторон у грани такого многогранника может быть любым числом от 3 до 7***.

***2.*** Рассмотрим граф

Для многогранника, соответствующего графу , . Подтверждающий пример построен.

Найдём все такие многогранники. Пусть для многогранника вектор имеет вид , где , и среди чисел нет повторяющихся более двух раз. Для многогранника количество граней равно , каждое ребро является стороной для двух граней, поэтому для количества рёбер получаем равенство

, (1)

откуда следует

*,* (2)

а из теоремы Эйлера определяем количество вершин :

(3)

Каждая вершина инцидента не менее, чем с тремя рёбрами, а каждое ребро инцидентно ровно с двумя вершинами. Так что, имеем неравенство

,

а с учётом (2),(3) получаем

(4)

1). Пусть чётно. Оценим снизу :

. (5)

С учётом (4) последовательно получаем

,

(6)

2). Пусть нечётно. Тогда оценка снизу имеет вид

. (7)

С учётом (4) получаем

,

а, затем, и

(8)

Из двух оценок (6) и (8) следует

(9)

Грань, имеющая сторон, понятно, соседствует с другими гранями. Поэтому

(10)

Далее, поскольку и среди чисел нет повторяющихся более двух раз, то

(11)

В случаях приходим к противоречию с (10).

В случае с учётом (10) без противоречия с (8) имеем единственно возможный вектор .

В случае для чётных значений оценка (6) имеет вид , таким образом, , а из (11) следует При этом неравенства в оценке (6) и, значит, в оценке (5) превращаются в равенства, так что набор чисел минимально возможный, и получаем вектор

В случае для нечётных значений из оценки (8) следует Для вектора реализуется единственная возможность: .

Для указанных векторов можно перейти к двойственным многогранникам. При этом перебор возможных вариантов становится достаточно коротким. Что и было проделано.

В результате,

-для вектора единственно возможный граф многогранника тот, который построен выше,

-для вектора единственно возможный граф многогранника имеет вид

-для вектора единственно возможный граф многогранника имеет вид

Перейдём к более общей задаче. Рассмотрим такие многогранники, для которых в векторе нет чисел, повторяюшихся более, чем раз (). Множество таких многогранников не пусто. Оно содержит уже найденные выше многогранники, а также многогранники, для которых, хотя бы одно из чисел : – угольную пирамиду (для , – угольную призму (для . Интересно, конечно ли множество таких многогранников, различных с точностью до изоморфизма соответствующих графов?

В аналогиных рассмотрениях и тех же обозначениях получаем ту же оценку (4). Пусть Тогда . А с учётом (4) получаем

Из неотрицательности дискриманта следует оценка

. (12)

Следовательно,

. (13)

Количество сторон каждой грани многогранника ограничено оценкой (13) , и, таким образом, ***множества конечно***.

Представляет интерес нахождение для каждого максимально возможного значения . При таком поиске в дополнение к оценке (13) необходимо также учитывать аналог оценки (11):