***Задача 214 (5 баллов)***

***Ответ:*** 1. Все грани многогранника могут быть $N $- угольниками только при $N=3,4,5$.

 2. Наименьшее число граней многогранника, у которого все грани пятиугольники, равно $12$.

 При $N=3,5$ найдены все значения, которые может принимать число граней многогранника, все грани которого $N $- угольники.

 При $N=3,4 н$айдена наибольшая возможная степень вершины многогранника с f гранями, каждая из которых является $N $– угольником. Получена оценка для наибольшей возможной степени вершины многогранника с f гранями, каждая из которых является пятиугольником.

***Решение:*** Пусть многогранник $M$, все грани которого $N $– угольники, имеет $f$ граней. Каждое ребро является стороной для двух граней, а у каждой грани ровно $N$ сторон, поэтому для количества рёбер $m$ получаем равенство

$2m=Nf$,(1)

а из формулы Эйлера для количества вершин $n$ получаем

$n=m+2-f=\frac{Nf}{2}+2-f=\left(\frac{N}{2}-1\right)f+2.$(2)

Каждая вершина инцидента не менее, чем с тремя рёбрами, а каждое ребро инцидентно ровно с двумя вершинами. Так что, имеем неравенство

$2m\geq 3n$,

а с учётом (1),(2) получаем

$$Nf\geq \left(\frac{3N}{2}-3\right)f+6,$$

$\left(3-\frac{N}{2}\right)f\geq 6.$ (3)

Из (3) следует $ 3-\frac{N}{2}>0$, откуда

$N\leq 5.$ (4)

Как известно, у правильных многогранников тетраэдра, гексаэдра (куба) и додекаэдра все грани, соответственно, треугольники, четырёхугольники и пятиугольники. Таким образом, ***все грани многогранника могут быть*** $N $***- угольниками только при*** $N=3,4,5$***.***

Из неравенства (3) при $N=5$ следует

 $f\geq 12$. (5)

У додекаэдра все грани являются пятиугольниками, и для него $f=12$. Таким образом, ***наименьшее число граней многогранника, у которого все грани пятиугольники, равно*** $12$***.***

Рассмотрим вопрос о том, сколько граней может иметь многогранник, все грани которого $N $- угольники при каждом $N=3,4,5$. В решении задачи 211 было показано, что ***многогранник с f гранями, каждая из которых является четырёхугольником, существует тогда и только тогда, когда*** $f=6$ ***или*** $f$ ***принимает любое целое значение*** $f\geq 8.$

Пусть $N=3$. Тогда из (1) следует чётность числа $f$. Покажем, что при любом чётном значении $f\geq 4$ существует многогранник с $f$ гранями-треугольниками. При $f=4$ имеем тетраэдр, для которого $f=4$. Пусть многогранник $P$ имеет $f$ граней-треугольников. К одной из граней приклеим треугольную пирамиду с достаточно малой высотой так, чтобы в результате образовался выпуклый многогранник $P\_{1}$. Понятно, что у многогранника $P\_{1}$ также все грани треугольники, а их число, по сравнению с количеством граней многогранника $P$ увеличилось на два и стало равным $f+2$. Такая процедура позволяет получить многогранник с любым чётным числом граней-треугольников $f\geq 4$. Таким образом, ***многогранник с f гранями, каждая из которых является треугольником, существует тогда и только тогда, когда*** $f$ ***чётно и*** $f\geq 4$***.***

Пусть $N=5$. Тогда из (1) также следует чётность числа $f$.

Пусть существует выпуклый многогранник $M$, у которого $f=14$ пятиугольных граней. Тогда у двойственного многогранника количество вершин, рёбер и граней равно $n=14,m=35,f=23.$ При этом одна грань является четырёхугольником, а остальные грани треугольники. К этой грани $G$ через каждую сторону примыкает по треугольной грани:

Из каждой вершины грани $G$ выходит ещё по одному ребру.

Пусть какие-то два из этих рёбер, выходящих из концов одного ребра, имеют общую вершину:

В образовавшейся четырёхугольной области других вершин нет, и, таким образом, степень одной из вершин четырёхугольника равна трём. Противоречие.

Пусть какие-то два из этих рёбер, выходящих из диагонально противоположных вершин грани $G$, имеют общую вершину:

Тогда к этим двум рёбрам примыкают по две треугольные грани, и общая вершина, в результате, уже имеет степень 6. Противоречие.

Пусть какие-то две диагонально противоположные вершины грани $G$ соединены ребром:

Тогда к этому ребру должны примыкать треугольные грани, и степень одного из концов ребра больше пяти. Противоречие.

Следовательно, рёбра, выходящие из вершин грани $G$, не имеют общих концов, и образуется такая конфигурация:

В вершины образовавшегося восьмиугольника входят внутренние рёбра (их осталось не проведенных 11) , а концов – 12. Следовательно, найдётся ребро, соединяющее вершины восьмиугольника. Таких рёбер может быть несколько. Они не пересекаются и разбивают восьмиугольник на области. Если такая область не имеет внутри вершин, то такая область – треугольная грань. Если внутри области есть вершина $H$, то такая область – пятиугольник, являющийся объединением пяти треугольных граней с общей вершиной $H$. Если такая область содержит две вершины, то такая область шестиугольник, являющийся объединением восьми треугольных граней. Сопоставляя количества исходящих рёбер вовнутрь восьмиугольника и пятиугольной грани, делаем вывод, что пятиугольная область не может примыкать к границе восьмиугольника больше чем по одной стороне. Аналогично, шестиугольная область не может примыкать к границе восьмиугольника больше чем по трём сторонам. Таким образом, ***выпуклый многогранник, у которого*** $14$ ***пятиугольных граней, не существует.***

При других чётных значениях $f\geq 12$ существует многогранник с $f $гранями, каждая из которых является пятиугольником***.*** Покажем это.

$f=4p,p\geq 3$:

Всего $p$ жёлтых граней (одна из них на рисунке изображена криволинейной с жёлтой стороной), $p$ зелёных граней (одна из них на рисунке изображена криволинейной с зелёной стороной), $p$ синих граней, $p$ розовых граней. Внешняя грань розовая.

$f=18:$

Далее, к любому уже имеющемуся многограннику можно по общей грани приклеить многогранник, гомеоморфный додекаэдру. При этом количество граней увеличивается на 10.

Так что, уже имея многогранники с 12-тью, 16-тью, 18-тью, 20-тью, 24-мя гранями, получаем многогранники с $12+10k,16+10k,18+10k,20+10k,24+10k,k\in N$ гранями. Таким образом, ***многогранник с f гранями, каждая из которых является пятиугольником, существует тогда и только тогда, когда*** $f=12$ ***или*** $f$***принимает любое чётное целое значение*** $f\geq 16.$

Интересен такой вопрос: какую наибольшую степень $α$ может иметь вершина $J$ многогранника с f гранями, каждая из которых является $N $– угольником ($N=3,4,5)$. Это важно при поиске все таких многогранников.

 $N=3:$ из формул (1),(2) имеем $m=\frac{3f}{2},n=\frac{f}{2}+2$. Понятно, что кроме вершин граней (их всего $α+1)$, сходящихся в вершине $J $есть по, крайней мере, ещё хотя бы одна вершина. Так что, $α+2\leq n . $ Получаем оценку $α\leq \frac{f}{2}$, которая достигается для бипирамиды. Так что, при $N=3: α=\frac{f}{2}.$

 $N=4:$ из формул (1),(2) имеем $m=2f,n=f+2$. Понятно, что кроме вершин граней (их всего $2α+1)$, сходящихся в вершине $J $есть по, крайней мере, ещё хотя бы одна вершина. Так что, $2α+2\leq n . $ Получаем оценку $α\leq \frac{f}{2}$, которая достигается для дельтохедрона (или трапецоэдра). Так что, при $N=4: α=\frac{f}{2}$**.**

 $N=5:$ из формул (1),(2) имеем $m=\frac{5f}{2},n=\frac{3f}{2}+2$. Понятно, что кроме вершин граней (их всего $3α+1 )$, сходящихся в вершине $J $есть по, крайней мере, ещё хотя бы одна вершина. Так что, $3α+2\leq n . $ Получаем оценку $α\leq \frac{f}{2}$. Для многогранников с $f=4p,p\geq 3$, приведенных выше, $α=p=\frac{f}{4}$. Так что, при $N=5: α\leq \frac{f}{2}$**,** а при $N=5,f=4p: \frac{f}{4}\leq α\leq \frac{f}{2}.$