***Задача 214 (5 баллов)***

***Ответ:*** 1. Все грани многогранника могут быть - угольниками только при .

2. Наименьшее число граней многогранника, у которого все грани пятиугольники, равно .

При найдены все значения, которые может принимать число граней многогранника, все грани которого - угольники.

При айдена наибольшая возможная степень вершины многогранника с f гранями, каждая из которых является – угольником. Получена оценка для наибольшей возможной степени вершины многогранника с f гранями, каждая из которых является пятиугольником.

***Решение:*** Пусть многогранник , все грани которого – угольники, имеет граней. Каждое ребро является стороной для двух граней, а у каждой грани ровно сторон, поэтому для количества рёбер получаем равенство

,(1)

а из формулы Эйлера для количества вершин получаем

(2)

Каждая вершина инцидента не менее, чем с тремя рёбрами, а каждое ребро инцидентно ровно с двумя вершинами. Так что, имеем неравенство

,

а с учётом (1),(2) получаем

(3)

Из (3) следует , откуда

(4)

Как известно, у правильных многогранников тетраэдра, гексаэдра (куба) и додекаэдра все грани, соответственно, треугольники, четырёхугольники и пятиугольники. Таким образом, ***все грани многогранника могут быть - угольниками только при .***

Из неравенства (3) при следует

. (5)

У додекаэдра все грани являются пятиугольниками, и для него . Таким образом, ***наименьшее число граней многогранника, у которого все грани пятиугольники, равно .***

Рассмотрим вопрос о том, сколько граней может иметь многогранник, все грани которого - угольники при каждом . В решении задачи 211 было показано, что ***многогранник с f гранями, каждая из которых является четырёхугольником, существует тогда и только тогда, когда или принимает любое целое значение***

Пусть . Тогда из (1) следует чётность числа . Покажем, что при любом чётном значении существует многогранник с гранями-треугольниками. При имеем тетраэдр, для которого . Пусть многогранник имеет граней-треугольников. К одной из граней приклеим треугольную пирамиду с достаточно малой высотой так, чтобы в результате образовался выпуклый многогранник . Понятно, что у многогранника также все грани треугольники, а их число, по сравнению с количеством граней многогранника увеличилось на два и стало равным . Такая процедура позволяет получить многогранник с любым чётным числом граней-треугольников . Таким образом, ***многогранник с f гранями, каждая из которых является треугольником, существует тогда и только тогда, когда чётно и .***

Пусть . Тогда из (1) также следует чётность числа .

Пусть существует выпуклый многогранник , у которого пятиугольных граней. Тогда у двойственного многогранника количество вершин, рёбер и граней равно При этом одна грань является четырёхугольником, а остальные грани треугольники. К этой грани через каждую сторону примыкает по треугольной грани:

Из каждой вершины грани выходит ещё по одному ребру.

Пусть какие-то два из этих рёбер, выходящих из концов одного ребра, имеют общую вершину:

В образовавшейся четырёхугольной области других вершин нет, и, таким образом, степень одной из вершин четырёхугольника равна трём. Противоречие.

Пусть какие-то два из этих рёбер, выходящих из диагонально противоположных вершин грани , имеют общую вершину:

Тогда к этим двум рёбрам примыкают по две треугольные грани, и общая вершина, в результате, уже имеет степень 6. Противоречие.

Пусть какие-то две диагонально противоположные вершины грани соединены ребром:

Тогда к этому ребру должны примыкать треугольные грани, и степень одного из концов ребра больше пяти. Противоречие.

Следовательно, рёбра, выходящие из вершин грани , не имеют общих концов, и образуется такая конфигурация:

В вершины образовавшегося восьмиугольника входят внутренние рёбра (их осталось не проведенных 11) , а концов – 12. Следовательно, найдётся ребро, соединяющее вершины восьмиугольника. Таких рёбер может быть несколько. Они не пересекаются и разбивают восьмиугольник на области. Если такая область не имеет внутри вершин, то такая область – треугольная грань. Если внутри области есть вершина , то такая область – пятиугольник, являющийся объединением пяти треугольных граней с общей вершиной . Если такая область содержит две вершины, то такая область шестиугольник, являющийся объединением восьми треугольных граней. Сопоставляя количества исходящих рёбер вовнутрь восьмиугольника и пятиугольной грани, делаем вывод, что пятиугольная область не может примыкать к границе восьмиугольника больше чем по одной стороне. Аналогично, шестиугольная область не может примыкать к границе восьмиугольника больше чем по трём сторонам. Таким образом, ***выпуклый многогранник, у которого пятиугольных граней, не существует.***

При других чётных значениях существует многогранник с гранями, каждая из которых является пятиугольником***.*** Покажем это.

:

Всего жёлтых граней (одна из них на рисунке изображена криволинейной с жёлтой стороной), зелёных граней (одна из них на рисунке изображена криволинейной с зелёной стороной), синих граней, розовых граней. Внешняя грань розовая.

Далее, к любому уже имеющемуся многограннику можно по общей грани приклеить многогранник, гомеоморфный додекаэдру. При этом количество граней увеличивается на 10.

Так что, уже имея многогранники с 12-тью, 16-тью, 18-тью, 20-тью, 24-мя гранями, получаем многогранники с гранями. Таким образом, ***многогранник с f гранями, каждая из которых является пятиугольником, существует тогда и только тогда, когда или принимает любое чётное целое значение***

Интересен такой вопрос: какую наибольшую степень может иметь вершина многогранника с f гранями, каждая из которых является – угольником (. Это важно при поиске все таких многогранников.

из формул (1),(2) имеем . Понятно, что кроме вершин граней (их всего , сходящихся в вершине есть по, крайней мере, ещё хотя бы одна вершина. Так что, Получаем оценку , которая достигается для бипирамиды. Так что, при

из формул (1),(2) имеем . Понятно, что кроме вершин граней (их всего , сходящихся в вершине есть по, крайней мере, ещё хотя бы одна вершина. Так что, Получаем оценку , которая достигается для дельтохедрона (или трапецоэдра). Так что, при **.**

из формул (1),(2) имеем . Понятно, что кроме вершин граней (их всего , сходящихся в вершине есть по, крайней мере, ещё хотя бы одна вершина. Так что, Получаем оценку . Для многогранников с , приведенных выше, . Так что, при **,** а при