***Задача 217 (5 баллов)***

***Ответ:*** 1. Доказано, что если у шестигранника с четырёхугольными гранями пересекаются диагонали , то не все остальные пары диагоналей скрещиваются.

2. В общем случае для шестигранника с четырёхугольными гранями найдены все значения количества пар скрещивающихся диагоналей.

***Решение:*** Докажем, что ***диагонали и пересекаются***.

У указанного шестигранника рёбер, а из формулы Эйлера для выпуклых многогранников следует, что у него вершин. Из каждой вершины выходит не меньше трёх рёбер, и если бы из какой-то вершины выходило больше трёх рёбер, то всего было бы не меньше рёбер, что не так. Значит, у шестигранника с четырёхугольными гранями в каждой вершине сходится по три грани, и, следовательно, его каркас изоморфен каркасу куба.

Обозначим через плоскость, содержащую грань , через - плоскость, содержащую грань , через - плоскость, содержащую грань , через - плоскость, содержащую грань ,

По условию диагонали и пересекаются, значит, точки лежат в одной плоскости. Обозначим эту плоскость через .

1. Пусть прямые и параллельны. Тогда непараллельные

плоскости и , содержащие, соответственно, прямые и , пересекаются по прямой, параллельной каждой из прямых и . Значит, прямая параллельна каждой из прямых и . Аналогично, прямая , являющаяся прямой пересечения плоскостей и , также параллельна каждой из прямых и . Следовательно, прямые параллельны. В плоскости, проходящей через параллельные прямые рассмотрим выпуклый четырёхугольник с вершинами , его сторонами являются рёбра исходного многогранника и , диагональ грани и диагональ грани , а диагоналями – отрезки и , которые понятно, пересекаются.

1. Пусть прямые и не параллельны.

Далее, предположим, что прямая параллельна прямой . Тогда прямая параллельна плоскости , и, поскольку, плоскость содержащая прямую , пересекает плоскость по прямой , то прямая параллельна прямой Таким образом, прямые и параллельны – противоречие с предположением этого пункта.

Так что, прямая не параллельна прямой и, аналогично, прямая не параллельна прямой . Пусть прямая пересекается с прямой в точке Понятно, что точка является точкой пересечения прямой . А, поскольку, точка пересечения прямой и прямой тоже лежит в плоскости и также является точкой пересечения прямой , то точки и совпадают. Таким образом, доказано, что прямая проходит через точку пересечения прямых и .

Аналогично получаем, что прямая также проходит через точку пересечения прямых и . И в результате доказано, что прямые и пересекаются, а, значит, лежат в одной плоскости. Далее так же, как и в п.1) в плоскости, содержащей прямые рассмотрим выпуклый четырёхугольник с вершинами . Его сторонами являются рёбра исходного многогранника и , диагональ грани и диагональ грани , а диагоналями – отрезки и , которые понятно, пересекаются.

Основное утверждение доказано.

Понятно, что и обратное утверждение верно: если диагонали и пересекаются, то и диагонали также пересекаются (для доказательства достаточно переобозначить вершины).

Таким образом, диагонали и пересекаются тогда и только тогда, когда пересекаются диагонали

То же верно и для других вариантов двух пар диагоналей. Таким образом, все шесть пар диагоналей разбиваются на три пары по две пары таким образом, что как только в одной паре по две диагонали какие-то две диагонали пересекается, то и другие две диагонали из этой пары также пересекаются.

Так что, общее количество пар пересекающихся диагоналей чётно. Ну, и

общее количество пар скрещивающихся диагоналей чётно.

Рассмотрим варианты получения многогранников с различными чётными количествами пар скрещивающихся диагоналей.

***0 пар:*** у куба все диагонали пересекаются в одной точке, значит, скрещивающихся диагоналей нет.

***2 пары:***  у прямой призмы с основанием – равнобокой трапецией ровно 4 пары пересекающихся диагоналей, значит, ровно 2 пары скрещивающихся диагоналей.

***4 пары:*** пусть у куба точка - середина ребра , а точка

выбрана на продолжении ребра за точку так, что . Тогда в шестиграннике пересекаются только лишь пара диагоналей и, и пара диагоналей Значит, всего ровно 4 пары скрещивающихся диагоналей.

***6 пар:*** понятно, что для шестигранника в общем положении каждая пара “противоположных” рёбер ( и , и , ) не лежит в одной плоскости, если это оказалась не так, то достаточно немного пошевелить каркас. В этом случае никакие две диагонали не пересекаются, значит, имеем 6 пар скрещивающихся диагоналей.