***Задача 218 (5 баллов)***

***Ответ:*** 1. Доказано, что наименьшее возможное количество диагоналей у выпуклого многогранника, имеющего ровно 2017 рёбер, равно 1004.

2. Найдено количество выпуклых многогранников, имеющих ровно 2017 рёбер и 1004 диагоналей.

3. Для каждого найдено наименьшее возможное количество диагоналей у выпуклого многогранника, имеющего ровно рёбер.

4. Для каждого найдено количество выпуклых многогранников, имеющих рёбер и диагоналей.

5. Для каждого найдены наименьшие возможные количества диагоналей у выпуклого многогранника, имеющего ровно рёбер.

***Решение:*** 1.По условию в многограннике рёбер, а для количества вершин и количества граней из формулы Эйлера для выпуклых многогранников имеем

(1)

В каждой вершине сходится не менее трёх рёбер, а каждое ребро соединяет две вершины, поэтому

(2)

Каждая грань имеет не менее трёх сторон, а каждое ребро является стороной для двух граней, поэтому

(3)

Из (2),(3) с учётом (1) получаем

,

и так как получаем диапазон для количества вершин

*.*

Обозначим через количество сторон грани. Упорядочим грани по возрастанию числа сторон так, что

*.* (4)

Диагонали многогранника это те отрезки, соединяющие вершины многогранника, которые не являются ни рёбрами, ни диагоналями граней. От общего числа отрезков, соединяющих вершины многогранника, отнимаем общее количество диагоналей всех граней и получаем количество диагоналей

.

А с учётом , получаем

 . (5)

***Лемма*** Еслитаковы, что , то

 .

***Доказательство***

*.*

 Из леммы следует, что если в наборе чисел (4) какое-то число увеличить на 1, а какое-то меньшее число уменьшить на 1, то значение выражения (5) уменьшится. А если для первоначального набора и изменённого набора чисел существуют соответствующие многогранники, то при переходе ко второму многограннику количество его диагоналей уменьшится по сравнению с количеством диагоналей исходного многогранника.

 Пусть сначала При каждом фиксированном значении

 .

 В соответствующем графе с внешней наибольшей гранью проведём триангуляцию всех остальных граней, тогда получившееся количество рёбер не меньше первоначального: . Так что . Таким образом, для допустимого набора чисел (4) . А с учётом леммы для набора мы получим наименьшее возможное значение выражения (5) среди всех допустимих наборов. Для такого набора, понятно, существует соответсвующий граф. Для его построения в грань с сторонами произвольным образом помещаем вершин и проводим триангуляцию. Многранник, соответсвующий построенному графу, имеет

 диагоналей. На указанном диапазоне минимальное значение количества диагоналей равно и достигается при .

 Перейдём к случаю При каждом фиксированном значении . К каждой стороне грани многранника примыкает другая грань многранника. Поэтому

 (6)

Грани, соответствующие числам и , возможно, имеют общие вершины, но не больше двух, поэтому

 . (7)

Следуя лемме, рассматриваем максимально возможные значения и , удовлетворяющие неравенствам (6), (7):. Тогда для многогранника с такими выбранными наибольшим числами в наборе (4) остальные числа восстанавливаются однозначно (две наибольшие грани имеют две общие вершины, а других вершин, кроме вершин двух наибольших граней, нет, поэтому остальные рёбра в графе проводим, однозначно определяя набор (4)). Для такого многогранника количество диагоналей равно

Так как в найденном наборе, в отличие от первого случая, не все числа кроме двух последних минимальны и равны 3, то, строго говоря, не понятно, является ли найденное значение минимальным.

 Оценим количество диагоналей снизу. Пусть многограннику, имеющему при фиксированном значении наименьшее количество диагоналей, соответствует некий набор чисел (4). Для него, как было показано, выполняются неравенства (6) и (7). Следуя лемме, увеличивая три наибольших числа и уменьшая остальные, придём к набору для которого значение выражения в (5) уменьшилось и стало равным

Видно, что в диапазоне наименьшее значение достигается при и равно 1004. А поскольку , то ***1004 и есть наименьшее значение количества диагоналей для выпуклого многогранника с 2017 рёбрами***.

 2. Опишем многогранник с наименьшим число диагоналей. У него 1009 граней, 1010 вершин. Набор чисел (4) имеет вид

.

 В соответствующем графе с внешней наибольшей гранью две вершины расположенные внутри, являються общими вершинами двух четырёхугольных граней. А треугольные грани разбиваются на две группы, в каждой из которых находяться грани, имеющие последовательно каждая с последующей общее ребро. Таких разбиений столько, сколько представлений числа 1006 в виде двух слагаемых без учёта порядка. Всего имеем 503 представлений: .

 Таким образом, доказано, что ***многранников с 2017 рёбрами и 1004 диагоналями, с точностью до изоморфизма каракасов, есть ровно 503***.

3. Следуя приведеному решению, обобщим результат на случай произвольного нечётного количества рёбер (при меньших нечётных многранников с рёбрами не существует).

 При каждом фиксированном значении . Тогда для ***многогранника с набором***

***количество диагоналей минимально и равно*** . На указанном диапазоне минимальное значение количества диагоналей равно и достигается при .

 Далее, при каждом фиксированном значении . Для минимального количества диагоналей получим оценку снизу значением , которое в указанном диапазоне достигает своего минимального значения при и равно . Оценка достигается на многраннике с . Строится многогранник так же, как и в случае Таким образом, ***найдено наименьшее возможное количество диагоналей у выпуклого многогранника, имеющего ровно рёбер.***

 4. Всего таких ***многранников с N рёбрами и диагоналями, с точностью до изоморфизма каракасов, есть ровно .***

 ***Понятно, что для чётного минимальное количество диагоналей равно 0 и реализуется только в случае угольной пирамиды.***

5.Интересен вопрос о нахождении второго по порядку - , третьего - и т.д. значения количества диагоналей. Приведём первые 4 найденные значения для случая :

 Действительно, для первых двух значений реализация указана выше. Далее, реализуется на многогранннике с набором .

 реализуется на многогранннике с набором и на многогранннике с набором

 Указанными многранниками исчерпываются все многогоранники с и с

 В случае , а в случае (следует после вичислений с учётом леммы).

 В случаях : (следует из рассмотрений п.1).

 Понятно, каким будет результат для произвольного большого значения