***Задача 219 (5 баллов)***

***Ответ:*** Максимально возможное количество диагоналей выпуклого многогранника с одиннадцатью гранями равно 73.

Найдено максимально возможное количество диагоналей выпуклого - многогранника с гранями для каждого .

***Решение:*** Обозначим через количество граней, рёбер и вершин многогранника, и пусть упорядоченный набор чисел, где - количество сторон грани:

*.* (1)

Диагонали многогранника это те отрезки, соединяющие вершины многогранника, которые не являются ни рёбрами, ни диагоналями граней. От общего числа отрезков, соединяющих вершины многогранника, отнимаем количество рёбер и общее количество диагоналей всех граней и получаем количество диагоналей

.

А с учётом , получаем

 . (2)

***Лемма*** Еслитаковы, что , то

 .

***Доказательство***

*.*

 Из леммы следует, что если в наборе чисел (1) есть пара чисел, отличающихся больше, чем на 1, то увеличив на 1 меньшее из них и уменьшив на 1 большее из них, мы увеличим значение выражения (2). А если для первоначального набора и изменённого набора чисел существуют соответствующие многогранники, то при переходе ко второму многограннику количество его диагоналей увеличится по сравнению с количеством диагоналей исходного многогранника. Таким образом, при фиксированных значениях , удовлетворяющих соотношению Эйлера, наибольшее значение достигается на наборе (1), для которого

 . (3)

 С другой стороны, если в многограннике есть вершина , в которой сходится больше трёх рёбер, то без изменения количества граней можно перейти к многограннику с не меньшим количеством диагоналей:

 A A1 A2

вместо вершины вводим вершины и с ребром , при этом количество диагоналей с концом в точке удваивается, и, возможно, появляются новые диагонали с концами в вершинах и , а количество других диагоналей не изменяется.

 Таким образом, при фиксированном количестве граней для нахождения наибольшего количества диагоналей достаточно рассмотреть случай, когда в каждой вершине сходится ровно три ребра, и тогда граф двойственного многогранника является триангуляцией. В этом случае , и из формулы Эйлера следует . Среднее значение количества сторон граней многогранника равно . С учётом условия (3) для каждого значения находим набор чисел , на котором достигается максимум

 (4)

Таким образом, для наибольшего количества диагоналей многогранника с гранями выполняется оценка

(5)

 Для построим многогранники с соответствующим оптимальным набором . Ниже указаны графы двойственных многогранников

Пусть для уже построен многогранник с оптимальным набором c двойственным графом, содержащим фрагмент .

 5 5 5

 5 5

 5

Добавляем три вершины, девять рёбер и получаем граф с фрагментом, содержащим фрагмент :

 6 5 6

 5 5

 5 5 5

 6

Таким образом, стартуя с , мы последовательно получаем многогранники, соответствующие оптимальному набору, при всех .

 Пусть Покажем, что многогранник с набором не существует. В предположении существования проанализируем граф двойственного многогранника. Пусть вершина степени 4 принадлежит внешней грани. Тогда получаем однозначно восстанавливаемую картинку граней, имеющих общие вершины с внешней гранью

Внутри ещё незаполненной пятиугольной грани находятся три вершины, которые связаны рёбрами, поэтому всего внутри находится рёбер. А в сумме с остальными получаем не меньше 28 рёбер. Противоречие, так как наш граф содержит 27 рёбер.

Таким образом, оценка не достижима. Построим многогранник с набором , имеющий 73 диагонали.

Граф двойственного многогранника имеет вид

 5

 5

 5 5

 5 5

 4 4

6

 5 5

 Пусть Покажем, что многогранник с набором не существует. В предположении существования проанализируем граф двойственного многогранника. Пусть вершина степени 6 принадлежит внешней грани. Тогда получаем однозначно восстанавливаемую картинку граней, имеющих общие вершины с внешней гранью

Внутри ещё незаполненной семиугольной грани находятся три вершины, которые связаны рёбрами, поэтому всего внутри находится рёбер. А в сумме с остальными получаем рёбер. Наш граф содержит 33 ребра. Значит, и семиугольная грань после триангуляции должна иметь вид

И видим, что степени вершин семиугольной грани не совпадают с необходимым количеством внутренних рёбер при любом совмещении граней, и, значит, необходимого заполнения семиугольной грани не существует. Таким образом, оценка не достижима. Построим многогранник с набором , имеющий 128 диагоналей.

Граф двойственного многогранника имеет вид

 5

 6

 5 5

 4

 5 5

 6

 5 5

 *5*

Добавляя каждый раз по одному поясу, состоящему из 12-ти граней, (на рисунке выделен его контур), последовательно получим графы для оптимальных наборов при

Аналогично предыдущему добавляя каждый раз по одному поясу, состоящему из 12-ти граней, (на рисунке выделен его контур), последовательно получим графы для оптимальных наборов при

Аналогично предыдущему добавляя каждый раз по одному поясу, состоящему из 12-ти граней, (на рисунке выделен его контур), последовательно получим графы для оптимальных наборов при .

Опять же, добавляя каждый раз по одному поясу, состоящему из 12-ти граней, (на рисунке выделен его контур), последовательно получим графы для оптимальных наборов при

Таким образом, доказана теорема.

***Теорема*** *При* максимальное количество диагоналей равно

, а при максимальное количество диагоналей

равно значению , взятому из (4),(5).