ММ221

**Ответ:** Уравнение имеет бесконечно много решений в натуральных числах.

**Решение:** Непосредственной подстановкой убеждаемся, что тройка $\left(5,29,3\right) $ является решением уравнения

$3x^{4}+2y^{3}=37^{z}$ (1)

Равенство (1) при $x=5,y=29,z=3$ умножим на $37^{12m},m\in N$ . Получим

$3\left(5∙37^{3m}\right)^{4}+2\left(29∙37^{4m}\right)^{3}=37^{3+12m}$.

Это показывает, что тройка $\left(5∙37^{3m},29∙37^{4m},3+12m\right)$ при каждом $m\in N$ является решением уравнения. Таким образом, решений уравнения (1) в натуральных чисел существует бесконечно много.

**Обобщение**

***Теорема*** Пусть заданы натуральные числа $a\_{1},…,a\_{n} ,b,α\_{1},…,α\_{n}. $ Уравнение

$\sum\_{i=1}^{n}a\_{i}x\_{i}^{α\_{i}}=b^{z}$(2)

в натуральных числах либо имеет бесконечно много решений либо не имеет вообще.

***Доказательство*** Пусть решением уравнения (2) является набор ($x\_{1}^{0},…,x\_{n}^{0},z\_{0})$. Тогда если $Λ=НОК\left(α\_{1},…,α\_{n}\right)$ и при этом $Λ=γ\_{1}α\_{1}=…=γ\_{n}α\_{n}$, то имеем бесконечно много решений в виде наборов ($b^{mγ\_{1}}x\_{1}^{0},…,b^{mγ\_{n}}x\_{n}^{0},z\_{0}+Λm),m\in N$.

Рассмотрим такое уравнение:

$2x^{2}=3^{z} $(3)

Слева – чётное число, а справа – нечётное. Так что уравнение (3) в натуральных числах решений не имеет. Пример вместе с исходным уравнением показывает, что оба случая, указанные в теореме, реализуются.

Заметим, что уравнение (2) также как и уравнение (1), является частным случаем однородного уравнения вида

$F\left(x\_{1},…,x\_{n}\right)=G(z\_{1},…,z\_{m})$,

где функции $F\left(x\_{1},…,x\_{n}\right)$, $G\left(lny\_{1}…,lny\_{m}\right)$ удовлетворяют условию обобщённой однородности

$$F\left(k^{γ\_{1}}x\_{1},…,k^{γ\_{n}}x\_{n}\right)=k^{Λ}F\left(x\_{1},…,x\_{n}\right)$$

Понятно, что при аналогичных ограничениях на показатели в условии однородности справедлив тот же результат.