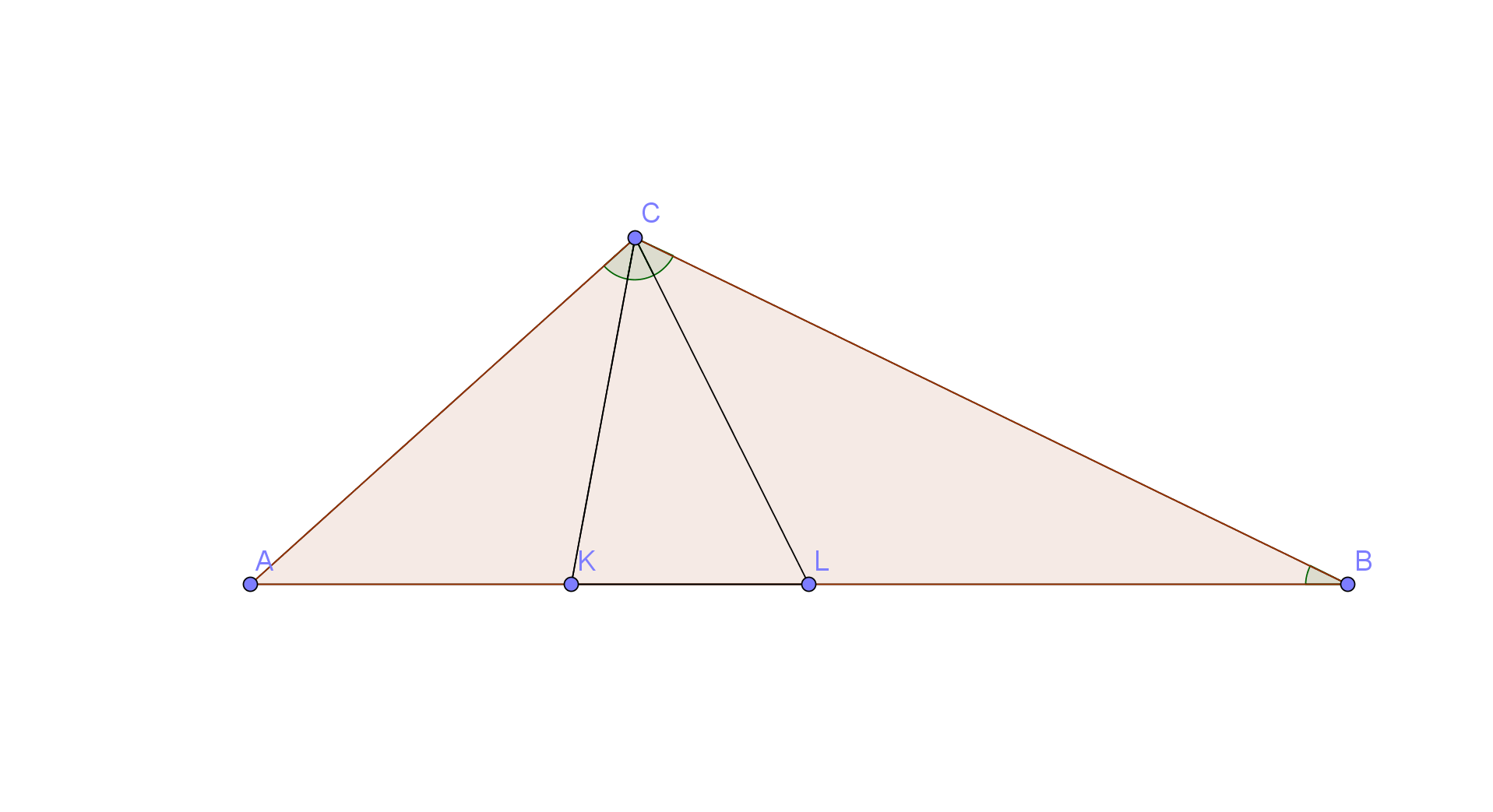
ММ224 (5 баллов)

**Ответ:** Возможны три значения величины угла C:

1. (
2. ()
3. ()

**Решение:** В треугольнике из вершины провели трисектрисы и как показано на рисунке. Пусть . Тогда



Пусть площади треугольников, на которые разбивается треугольник трисектрисами, равны: С одной стороны . С другой стороны, по теореме синусов для треугольника : . Так что

. (1)

Аналогично получаем

(2)

Пусть далее . Тогда после преобразований из (1) получаем

(2.1)

а из (2):

*.*

И, наконец,

(3)

Далее, поскольку , получаем необходимое условие для величин площадей:

(4)

Замечаем, что если и для определённости пусть , то имеем

что противоречит условию (4). Следовательно, с необходимостью

или . (5)

Разберём сначала возможные Петины варианты. Вариант противоречит условию (5), а в варианте , что противоречит условию (4).

1. Пусть , и для определённости . В этом случае последовательно вычисляем

*,*

*.* В градусах:

Таким образом, в треугольнике с найденными углами отношение площадей , и поэтому при подходящем коэффициенте гомотетии можно добиться, чтобы площади треугольников были равны выбранным значениям: 4,2,10.

Разберём теперь возможные Васины варианты. Вариант противоречит условию (5).

1. Пусть , и для определённости . В этом случае последовательно вычисляем

*,*

*.* В градусах:

Таким образом, в треугольнике с найденными углами отношение площадей , и поэтому при подходящем коэффициенте гомотетии можно добиться, чтобы площади треугольников были равны выбранным значениям: 2,4,20.

1. Пусть , и для определённости . В этом случае последовательно вычисляем

*,*

*.* В градусах:

Таким образом, в треугольнике с найденными углами отношение площадей , и поэтому при подходящем коэффициенте гомотетии можно добиться, чтобы площади треугольников были равны выбранным значениям: 4,2,20.

Далее, при исследовании достаточных условий существования треугольника с данным упорядоченным набором площадей с произвольными положительными числами в наборе, замечаем, что условия (4) и (5) обеспечивают существование единственного значения угла (определяемого из (3)), а также единственного значения угла (определяемого из (2.1)). Дополнительным и уже достаточным условием служит неравенство

в терминах определённых значений и из условий (4) и (5). В частном случае , понятно, и для любого значения существует реализация треугольника с таким набором площадей, при этом .