ММ225 (5 баллов)

Ответ: $a = -\frac{13}{9}, -\frac{47}{31}$.

Решение: Пусть m и n – два различных целых корня исходного уравнения, так что выполнены равенства

$$(2a+3)m^2 + am + 3a - 1 = 0, \qquad (1)$$

$$(2a+3)n^2 + an + 3a - 1 = 0. \qquad (2)$$

Из первого равенства следует

$$a = \frac{1-3m^2}{2m^2+m+3}, \qquad (3)$$

а из второго

$$a = \frac{1-3n^2}{2n^2+n+3}. \qquad (4)$$

Приравниваем правые части

$$\frac{1-3m^2}{2m^2+m+3} = \frac{1-3n^2}{2n^2+n+3},$$

и после преобразований получаем

$$(m-n)(3mn + 11m + 11n + 1)=0.$$

А так как $m \neq n$, то $3mn + 11m + 11n + 1 = 0$. После преобразований получаем $(3m+11)(3n+11) = 118$. Далее среди делителей числа 118 $(\pm1, \pm2, \pm59, \pm118)$ ищем такие, которые при делении на 3 дают остаток 2. Имеется два таких представления

1) $118 = 2 \cdot 59$

2) $118 = (-1) \cdot (-118)$

1) $3m + 11 = 2, 3n + 11 = 59 \Rightarrow m = -3, n = 16$. Из (3),(4) определяем $a = -\frac{13}{9}$. Подставляем в исходное уравнение и убеждаемся, что оно имеет указанные корни.
2) $3m + 11 = -1, 3n + 11 = -118 \Rightarrow m = -4, n = -43$. Из (3),(4) определяем $a = -\frac{47}{31}$. Подставляем в исходное уравнение и убеждаемся, что оно имеет указанные корни.

Для полноты рассмотрим возможное совпадение двух целых корней. В этом случае дискриминант равен нулю:

$a^2 - 4(2a+3)(3a-1) = 0.$

Находим два значения параметра $a = \frac{-14 \pm 2\sqrt{118}}{23}$ и соответствующие значения кратного корня $x = \frac{7 \pm \sqrt{118}}{41 \mp 4\sqrt{118}}$, как видим, не являющегося целым числом.

Таким образом, условию удовлетворяют два значения параметра a: $-\frac{13}{9}$ и $-\frac{47}{31}$.

Обобщение

Пусть заданы целые числа $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$. Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$$(\alpha a + \beta)x^2 + (\gamma a + \delta)x + \varepsilon a + \zeta = 0 \qquad (5)$$

имеет ровно два целых корня.

Следуя предложенной схеме, предполагаем, что m и n – два различных целых корня, тогда из двух равенств

$$(\alpha a + \beta)m^2 + (\gamma a + \delta)m + \varepsilon a + \zeta = 0,$$

$$(\alpha a + \beta)n^2 + (\gamma a + \delta)n + \varepsilon a + \zeta = 0$$

следует $(\alpha m^2 + \gamma m + \varepsilon)(\beta n^2 + \delta n + \zeta) = (\alpha n^2 + \gamma n + \varepsilon)(\beta m^2 + \delta m + \zeta)$, откуда с учётом $m \neq n$ получаем

равенство

$$(Am + B)(An + B) = B^2 - AC\ , \qquad (6)$$

где

$$A = \alpha\delta - \beta\gamma,$$

$$B = \alpha\zeta - \beta\varepsilon,$$

$$C = \gamma\zeta - \varepsilon\delta.$$

И если d_1, d_2 – делители числа $B^2 - AC$ такие, что $d_1 \equiv B \; mod \; A, d_2 \equiv B \; mod \; A,$ то сначала определяем $m = \frac{B^2 - AC - B}{A}$, а затем и $a = -\frac{\beta m^2 + \delta m + \zeta}{\alpha m^2 + \gamma m + \varepsilon}$.

Возникает следующий вопрос: какие значения может принимать количество r таких значений параметра a, при которых существует ровно два целых корня уравнения (5)?

Рассмотрим уравнение

$$ax^2 + (2^{t+1}a + 1)x - 2^t a = 0, \quad t = 0,1, \dots \tag{7}$$

Тогда $A = 1, B = 0, C = 2^t$, а уравнение (6) приобретает вид

$$mn = -2^t \,,$$

что также следует из теоремы Виета.

Тогда имеем пары корней $(-2^t, 1)$, $(-2^{t-1}, 2), \dots, (-1, 2^t)$ – всего $(t+1)$ экземпляров, и соответствующие им значения параметра $a = -\frac{1}{2^{t+1}+1-2^t}, -\frac{1}{2^{t+1}+2-2^{t-1}}, \dots, -\frac{1}{2^{t+1}-1+2^t}$.

Таким образом, для уравнения (7) $r = t + 1$.

Заметим, что уравнение $ax^2 - a = 0$ при каждом значении параметра a имеет два целых корня $-1,1$.

А уравнение $ax^2 + a = 0$ ни при каком значении параметра a не имеет ровно два целых корня (при $a = 0$ $x -$ любое число).

Таким образом, r может принимать любой целое неотрицательное значение, а также r может быть равным бесконечности.