ММ227 (5 баллов)

Ответ: Доказано, что как сильных чисел, так и слабых чисел бесконечно много. Показано, что 46 –наименьшее слабое число.

Решение: Пусть $p_1, \dots, p_s$ - различные простые числа, а q – взаимно простое с каждым из них. Тогда, если $x = p_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot p_s^{\alpha_s} \cdot q$ – решение уравнения при $k = p_1^{\beta_1} \cdot \dots \cdot p_s^{\beta_s}$, $\beta_i \geq 1, i = 1, \dots, s$:

$$p_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot p_s^{\alpha_s} \cdot q = p_1^{\beta_1} \cdot \dots \cdot p_s^{\beta_s}(p_1 + \cdots + p_s + sopf(q))$$

то $\beta_i \leq \alpha_i, i = 1, \dots, s$, и, значит,

$$p_1^{\alpha_1-\beta_1+1} \cdot \dots \cdot p_s^{\alpha_s-\beta_s+1} \cdot q = p_1 \cdot \dots \cdot p_s(p_1 + \cdots + p_s + sopf(q)),$$

то есть $x = p_1^{\alpha_1-\beta_1+1} \cdot \dots \cdot p_s^{\alpha_s-\beta_s+1} \cdot q$ - решение уравнения при $k = p_1 \cdot \dots \cdot p_s$. Таким образом, если $k = p_1^{\beta_1} \cdot \dots \cdot p_s^{\beta_s}$ сильное, то и $k = p_1 \cdot \dots \cdot p_s$ – сильное.

Далее, если $k = p_1 \cdot \dots \cdot p_s$ – сильное, что означает, что существует $x = p_1^{\alpha_1} \dots p_s^{\alpha_s} \cdot q$, удовлетворяющее равенству

$$p_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot p_s^{\alpha_s} \cdot q = p_1 \cdot \dots \cdot p_s(p_1 + \cdots + p_s + sopf(q)),$$

то для любых $\beta_i \geq 1, i = 1, \dots, s$ имеем

$$p_1^{\alpha_1+\beta_1-1} \cdot \dots \cdot p_s^{\alpha_s+\beta_s-1} \cdot q = p_1^{\beta_1} \dots p_s^{\beta_s}(p_1 + \cdots + p_s + sopf(q)).$$

И, значит, $k = p_1^{\beta_1} \cdot \dots \cdot p_s^{\beta_s}$ также сильное.

В результате, если при некоторых значениях $\beta_i \geq 1, i = 1, \dots, s$ число $k = p_1^{\beta_1} \cdot \dots \cdot p_s^{\beta_s}$– сильное, то также сильным является и значение $k = p_1^{\gamma_1} \cdot \dots \cdot p_s^{\gamma_s}$ при любых $\gamma_i \geq 1, i = 1, \dots, s$.

Далее, пусть при некоторых значениях $\beta_i \geq 1, i = 1, \dots, s$ число $k = p_1^{\beta_1} \cdot \dots \cdot p_s^{\beta_s}$– слабое. Тогда слабым является и значение $k = p_1^{\gamma_1} \cdot \dots \cdot p_s^{\gamma_s}$ при любых $\gamma_i \geq 1, i = 1, \dots, s$. Действительно, предположим, это не так, и существует сильное значение $k = p_1^{\gamma_1} \cdot \dots \cdot p_s^{\gamma_s}$ при некоторых $\gamma_i \geq 1, i = 1, \dots, s$. Тогда, по доказанному выше, и число $k = p_1^{\beta_1} \cdot \dots \cdot p_s^{\beta_s}$ должно быть сильным, но это не так. Доказано.

Значит, все натуральные числа $k \geq 2$ можно разбить на непересекающиеся классы

$$C_{p_1 \dots p_s} = \left\{ p_1^{\beta_1} \cdot \dots \cdot p_s^{\beta_s} \middle| \beta_i \geq 1, i = 1, \dots, s \right\}.$$

Каждый класс при этом либо имеет только сильные числа либо только слабые.

Найдём некоторые классы сильных чисел. Пусть p – простое число. Поскольку $sopf(p^2) = p$, то $x = p^2$ – решение уравнения $x = p \cdot sopf(x)$.

Значит, $k = p$ – сильное и имеем класс сильных чисел C_p, понятно, содержащий бесконечно много чисел.

Найденные решения уравнения при $k \le 45$ приведены в таблице

k	x	$ifactor(x)$
1	p	p
2	4	2^2
3	9 30	3^2 $2 \cdot 3 \cdot 5$
4	8	2^3
5	25 70	5^2 $2 \cdot 5 \cdot 7$
6	60	$2^2 \cdot 3 \cdot 5$
7	49 84 105	7^2 $2^2 \cdot 3 \cdot 7$ $3 \cdot 5 \cdot 7$
8	16	2^4
9	27 90	3^3 $2 \cdot 3^2 \cdot 5$
10	140	$2^2 \cdot 5 \cdot 7$
11	121 231 286	11^2 $11 \cdot 13$ $2 \cdot 11 \cdot 13$
12	120	$2^3 \cdot 3 \cdot 5$
13	169 234 260	13^2 $2 \cdot 3^2 \cdot 13$ $2^2 \cdot 5 \cdot 13$
14	168	$2^3 \cdot 3 \cdot 7$
15	150	$2 \cdot 3 \cdot 5^2$
16	32	2^5
17	289 646	17^2 $2 \cdot 17 \cdot 19$
18	180	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$
19	361 456 532 627	19^2 $2^3 \cdot 3 \cdot 19$ $2^2 \cdot 7 \cdot 19$ $3 \cdot 11 \cdot 19$
20	280	$2^3 \cdot 5 \cdot 7$
21	252 315	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$ $3^2 \cdot 5 \cdot 7$
22	572	$2^2 \cdot 11 \cdot 13$
23	529 805	23^2 $5 \cdot 7 \cdot 23$

	897	$3 \cdot 13 \cdot 23$
24	240	$2^4 \cdot 3 \cdot 5$
25	125 350	5^3 $2 \cdot 5^2 \cdot 7$
26	468 520	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 13$ $2^3 \cdot 5 \cdot 13$
27	81 270	3^4 $2 \cdot 3^3 \cdot 5$
28	336	$2^4 \cdot 3 \cdot 7$
29	841 1798	29^2 $2 \cdot 29 \cdot 31$
30	300	$2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$
31	961 1116 1364 1581	31^2 $2^2 \cdot 3^2 \cdot 31$ $2^2 \cdot 11 \cdot 13$ $3 \cdot 17 \cdot 31$
32	64	2^6
33	528 693	$2^4 \cdot 3 \cdot 11$ $3^2 \cdot 7 \cdot 11$
34	1122 1292	$2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 17$ $2^2 \cdot 17 \cdot 19$
35	490 525	$2 \cdot 5 \cdot 7^2$ $3 \cdot 5^2 \cdot 7$
36	360	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$
37	1369 1665 1924	37^2 $3^2 \cdot 5 \cdot 37$ $2^2 \cdot 13 \cdot 37$
38	912 1064	$2^4 \cdot 3 \cdot 19$ $2^3 \cdot 7 \cdot 19$
39	702	$2 \cdot 3^3 \cdot 13$
40	560	$2^4 \cdot 5 \cdot 7$
41	1681 3526	41^2 $2 \cdot 41 \cdot 43$
42	504	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$
43	1849 2064 2150 2967	43^2 $2^4 \cdot 3 \cdot 43$ $2 \cdot 5^2 \cdot 43$ $3 \cdot 23 \cdot 43$
44	1144	$2^3 \cdot 11 \cdot 13$
45	450	$2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$

Видим, что слабых чисел среди первых 45-ти натуральных чисел нет. Попутно нашли несколько классов, содержащих сильные числа, которые определяются набором простых множителей в третьем столбце таблицы.

А теперь покажем, что $k = 46$ – слабое. Предположим уравнение

$$x = 46 \cdot sopf(x)$$

имеет решение.

1) $x = 2^{\alpha} \cdot 23^{\beta} \Rightarrow sopf(x) = 25 \Rightarrow x = 46 \cdot 25 \vdots 5 \Rightarrow \emptyset$
2) $x = 2^{\alpha} \cdot 23^{\beta} \cdot p^{\gamma} \Rightarrow sopf(x) = 25 + p \Rightarrow x = 46 \cdot (25 + p) \Rightarrow 46 \cdot 25 \vdots p \Rightarrow p = 5 \Rightarrow x = 46 \cdot 30 \vdots 3 \Rightarrow \emptyset$
3) $x = 2^{\alpha} \cdot 23^{\beta} \cdot p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_s^{\alpha_s} \Rightarrow sopf(x) = 25 + p_1 + \cdots + p_s \Rightarrow 2^{\alpha} \cdot 23^{\beta} \cdot p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_s^{\alpha_s} = 46 \cdot (25 + p_1 + \cdots + p_s) \Rightarrow 25 + p_1 + \cdots + p_s \geq p_1 \cdot \ldots \cdot p_s$

   $s = 2$: $(p_1 - 1)(p_2 - 1) \leq 26 \Rightarrow p_2 - 1 \leq \frac{26}{p_1 - 1} \leq \frac{26}{3-1} = 13 \Rightarrow p_2 \leq 13$

   $p_1 = 3, p_2 = 5 \Rightarrow x = 46(25 + 3 + 5) \vdots 11 \Rightarrow \emptyset$,
   $p_1 = 3, p_2 = 7 \Rightarrow x = 46(25 + 3 + 7) \vdots 5 \Rightarrow \emptyset$,
   $p_1 = 3, p_2 = 11 \Rightarrow x = 46(25 + 3 + 11) \vdots 13 \Rightarrow \emptyset$,
   $p_1 = 3, p_2 = 13 \Rightarrow x = 46(25 + 3 + 13) \vdots 41 \Rightarrow \emptyset$,
   $p_1 = 5, p_2 = 7 \Rightarrow x = 46(25 + 5 + 7) \vdots 37 \Rightarrow \emptyset$,
   $p_1 = 5, p_2 = 11 \Rightarrow x = 46(25 + 5 + 11) \vdots 41 \Rightarrow \emptyset$,
   $p_1 = 5, p_2 = 13 \Rightarrow x = 46(25 + 5 + 13) \vdots 43 \Rightarrow \emptyset$,
   $p_1 = 7, p_2 = 11 \Rightarrow x = 46(25 + 7 + 11) \vdots 43 \Rightarrow \emptyset$,
   $p_1 = 7, p_2 = 13 \Rightarrow x = 46(25 + 7 + 13) \vdots 5 \Rightarrow \emptyset$,
   $p_1 = 11, p_2 = 13 \Rightarrow x = 46(25 + 11 + 13) \vdots 7 \Rightarrow \emptyset$.

   $s \geq 3$: $25 + sp_s \geq 3 \cdot p_{s-1} \cdot p_s \Rightarrow p_s(3p_{s-1} - s) \leq 25$. И так как $(3p_{s-1} - s) \nearrow$, и потому $3p_{s-1} - s \geq 3 \cdot 5 - 3 = 12$. Получаем $p_s \leq 2$ – противоречие.

   Проверено, решений нет.

Мы показали, что класс $C_{2,23}$ содержит слабые числа. Так что слабых чисел бесконечно много.

Найдены и другие классы слабых чисел, например, с порождающими числами из первой сотни: $C_{5,11}, C_{5,17}, C_{3,29}$

Замечание Так же как и для $k = 46$ для любого $k = p_1^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot p_s^{\beta_s} \geq 2$ можно получить оценку сверху для простых делителей решений через $p_1 + \cdots + p_s$. Таким образом, при каждом сильном значении $k \geq 2$ количество решений уравнения $x = k \cdot sopf(x)$ конечно. А при $k = 1$ решениями являются простые числа, которых, понятно, бесконечно много.