*MM173.*

*Последовательность состоит из натуральных чисел, представимых в виде суммы четырех своих (попарно различных) делителей, расположенных в естественном порядке. Найти стомиллиардный член этой последовательности.*

*Решение.*

*Пусть $n$ некоторое число искомой последовательности, т.е. представимо в виде суммы четырех своих (попарно различных) делителей:*

$$n = p + q + r + s$$

*Где $p$, $q$, $r$, $s$ - попарно различные делители $n$.*

*Заметим, что $kn$ ($k$ - натуральное) тоже член искомой последовательности:*

$$kn = kp + kq + kr + ks$$

*Рассмотрим "приведённый" набор $(p, q, r, s, t)$, т.е. такой, что $t$ член исходной последовательности, $gcd\,(p, q, r, s) = 1$, $p + q + r + s = t$. Тогда все члены арифметической прогрессии с первым членом $t$ и знаменателем $t$ будут членами искомой последовательности. Иными словами, искомая последовательность - это объединение всех членов нескольких арифметических прогрессий.*

*Найдём "порождающие" наборы $(p, q, r, s)$ для всех арифметических прогрессий последовательности. Поделим на $t$ и получаем*

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = 1$$

*Таким образом, надо найти все наборы 4-х попарно различных аликвотных дробей, сумма которых равна 1.*

*Положим $1 < a < b < c < d$ и рассмотрим варианты:*

*Пусть $a = 3$, тогда $b \geqslant 4$, $c \geqslant 5$, $d \geqslant 6$, но*

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = 0.95 < 1$$

*тогда $a < 3$, т.е. $a = 2$*

*Теперь, пусть* $a = 2$ *и* $b = 6$*:*

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} < 1$$

*т.е* $3 \leqslant b \leqslant 5$. *Далее*

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} < 1 \ \text{ и } \ \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} > 1$$

*Тогда* $3 \leqslant b \leqslant 4$, *т.е.* $b$ *равно 3 или 4.*

*Продолжая аналагичный анализ для* $b = 4$ *находим 2 египетские дроби:* $c = 5$, $d = 20$ *и* $c = 6$, $d = 12$.

*А для* $b = 3$ *имеется 4 такие дроби - при* $c = 7$, $d = 42$; $c = 8$, $d = 24$; $c = 9$, $d = 18$ *и* $c = 10$, $d = 15$.

*Всего получаем 6 “порождающих” наборов:*

$$\begin{array}{lll}
1) & t = 12, & (p, q, r, s) = (1, 2, 3, 6) \\
2) & t = 18, & (p, q, r, s) = (1, 2, 6, 9) \\
3) & t = 20, & (p, q, r, s) = (1, 4, 5, 10) \\
4) & t = 24, & (p, q, r, s) = (1, 3, 8, 12) \\
5) & t = 30, & (p, q, r, s) = (2, 3, 10, 15) \\
6) & t = 48, & (p, q, r, s) = (1, 6, 14, 21)
\end{array}$$

*Первая прогрессия состоит чисел 12, 24, 36, 48, 60 и т.д. Все члены 4-ой прогрессии входят в эту первую.*

*Итак, исходная последовательность чисел состоит из членов 5 арифметических прогрессий, их знаменатели 12, 18, 20, 30 и 48.*

$$HOK\,(12, 18, 20, 30, 48) = 1260$$

*Следовательно, члены искомой последовательности распределены на множестве натуральных чисел с периодом 1260. Среди чисел от 1 до 1260 всего 204 числа (написал программу для подсчёта).*

$$[100\,000\,000\,000/204] = 490\,196\,078$$

$$490\,196\,078 \cdot 1\,260 = 617\,647\,058\,280$$

$$490\,196\,078 \cdot 204 = 99\,999\,999\,912$$

*Таким образом,* 99 999 999 912 *членом заданной последовательности будет число* 617 647 058 280*, находим член, стоящий на 88 месте после него.*

*В первом периоде 88-м членом является 546. Тогда*

$$617\,647\,058\,280 \;+\; 546 \;=\; 617\,647\,058\,826$$

*Стомиллиардный член заданной последовательности* - 617 647 058 826