О. Б. Полубасов 26.05.2013 г.

========= 175 ==========

MM175 (A-5) (8 баллов)

Решения принимаются, по крайней мере, до 23.05.13

Натуральное число n назовем g-2-числом, если число 2n, записанное в системе счисления с основанием g получается из n перестановкой цифр. Какие основания встречаются (в натуральном ряду) чаще: те, для которых существуют трехзначные g-2-числа, или те, в которых нет трехзначных g-2-чисел?

Примечание:
Рассматриваются позиционные системы счисления с натуральными основаниями $g > 1$.
======================

Удобнее анализировать не умножение числа на 2, а сложение двух одинаковых чисел «столбиком». Возможны всего четыре перестановки цифр трёхзначного числа (случай, когда первые цифры одинаковы, не реализуем). Для каждой перестановки при суммировании может произойти или не произойти перенос единицы из младшего разряда и из среднего. Всего получается 16 вариантов, для каждого из которых нетрудно выписать систему из трёх линейных диофантовых уравнений и, решив её, найти условия, наложенные на g.

ABC ABC BAC	перенос из младшего разряда	перенос из среднего разряда	СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ	РЕШЕНИЕ	
–	Нет	нет	2C = C 2B = A 2A = B	–	–
$130_{(5)}$ $130_{(5)}$ $310_{(5)}$	Нет	есть	2C = C 2B = A+g 2A+1 = B	g = 2 (mod 3), g ≥ 5	A = (g–2)/3 B = 2A+1 C = 0
–	Есть	нет	2C = C+g 2B+1 = A 2A = B	–	–
–	Есть	есть	2C = C+g 2B+1 = A+g 2A+1 = B	–	–

Таблица 1.

ABC ABC CBA	перенос из младшего разряда	перенос из среднего разряда	СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ	РЕШЕНИЕ	
–	нет	нет	2C = A 2B = B 2A = C	–	–
–	нет	есть	2C = A 2B = B+g 2A+1 = C	–	–
–	есть	нет	2C = A+g 2B+1 = B 2A = C	–	–
$143_{(5)}$ $143_{(5)}$ $341_{(5)}$	есть	есть	2C = A+g 2B+1 = B+g 2A+1 = C	g = 2 (mod 3), g ≥ 5	A = (g–2)/3 B = g–1 C = 2A+1

Таблица 2.

ABC ABC BCA	перенос из младшего разряда	перенос из среднего разряда	СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ	РЕШЕНИЕ	
–	нет	нет	2C = A 2B = C 2A = B	–	–
$251_{(9)}$ $251_{(9)}$ $512_{(9)}$	нет	есть	2C = A 2B = C+g 2A+1 = B	g = 2 (mod 7), g ≥ 9	C = (g–2)/7 A = 2C B = 4C+1
$125_{(9)}$ $125_{(9)}$ $251_{(9)}$	есть	нет	2C = A+g 2B+1 = C 2A = B	g = 2 (mod 7), g ≥ 9	A = (g–2)/7 B = 2A C = 4A+1
$376_{(9)}$ $376_{(9)}$ $763_{(9)}$	есть	есть	2C = A+g 2B+1 = C+g 2A+1 = B	g = 2 (mod 7), g ≥ 9	d = (g–2)/7 A = 3d B = 6d+1 C = 5d+1

Таблица 3.

ABC ABC CAB	перенос из младшего разряда	перенос из среднего разряда	СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ	РЕШЕНИЕ	
–	нет	нет	2C = B 2B = A 2A = C	–	–
$163_{(11)}$ $163_{(11)}$ $316_{(11)}$	нет	есть	2C = B 2B = A+g 2A+1 = C	g = 4 (mod 7), g ≥ 11	A = (g–4)/7 C = 2A+1 B = 4A+2
$316_{(11)}$ $316_{(11)}$ $631_{(11)}$	есть	нет	2C = B+g 2B+1 = A 2A = C	g = 4 (mod 7), g ≥ 11	B = (g–4)/7 A = 2B+1 C = 4B+2
$123_{(4)}$ $123_{(4)}$ $312_{(4)}$	есть	есть	2C = B+g 2B+1 = A+g 2A+1 = C	g = 4 (mod 7), g ≥ 4	d = (g–4)/7 A = 3d+1 B = 5d+2 C = 6d+3

Таблица 4.

Нашлось три семейства оснований, для которых существуют трёхзначные g-2-числа:
$g = 2 \pmod 3$,
$g = 2 \pmod 7$,
$g = 4 \pmod 7$,
причём два последних семейства не пересекаются, а первое статистически независимо от них, поэтому вероятность основания попасть хотя бы в какое-то из этих семейств равна $1 - (1 - 1/3)(1 - 2/7) = 11/21$, что больше половины.

Ответ. Основания, для которых существуют трёхзначные g-2-числа, встречаются чаще других в отношении 11:10.

ОБОБЩЕНИЕ

1. Анализ таблиц

Каждое уравнение системы выражает зависимость между какой-то парой переменных (цифр), причём, в зависимости от того, есть ли перенос в данный разряд, и есть ли перенос из данного разряда, возможны всего четыре типа уравнений.

Если в разряд есть перенос, назовём такой разряд ***входом***.

Если есть перенос из разряда, назовём такой разряд ***выходом***.

Тогда уравнения классифицируются так: **(1)**

- не вход и не выход: $2x = y$;
- вход: $2x + 1 = y$;
- выход: $2x = y + g$;
- вход и выход: $2x + 1 = y + g$.

Как известно, любая подстановка единственным образом представляется в виде произведения независимых циклов. В данном случае представления будут такими:

- таблица 1: (AB)(C);
- таблица 2: (AC)(B);
- таблица 3: (ABC);
- таблица 4: (ACB).

Циклы разбивают как множество переменных, так и множество уравнений на непересекающиеся классы. Классы взаимодействуют между собой только через переменную g (искомое основание системы счисления).

Если в классе нет выходов (переменная g не участвует), то:

- если в классе нет также и входов, то все переменные класса равны нулю;
- если в классе есть входы, то подсистема уравнений класса не имеет допустимых решений.

Отсюда сразу же следует, что первые строчки всех таблиц – лишние: в них нет переносов, то есть входов и выходов, а значит, единственное решение – все цифры – нули.

Рассмотрим цикл длины 1 (цифра переходит сама в себя). Из (1) следует:

- если разряд не является ни входом, ни выходом, то цифра равна 0;
- если разряд является и входом, и выходом, то цифра равна g-1;
- иначе, уравнение не имеет допустимых решений.

Следствие 1.

Из любого n-значного g-2 числа можно получить (n+1)-значное g-2 число, вставив после любого разряда цифру 0, если в разряд нет переноса, или цифру g-1, если в разряд есть перенос.

Доказательство.

Система уравнений осталась прежней, добавилось лишь одно тождественное уравнение, никак не связанное с другими.

Так, решение из таблицы 1 получилось приписыванием цифры 0 к числу $13_{(5)}$, а решение из таблицы 2 – вставкой цифры 4 внутрь того же числа.

Следствие 2.

Из любого g-2 числа можно получить сколь угодно длинное g-2 число.

Следствие 3.

Множество оснований, для которых существуют n-значные g-2 числа, включает в себя все множества оснований для g-2 чисел меньших разрядностей.

Следствие 4.

Для любого n > 2 чаще встречаются основания, для которых существуют n-значные g-2-числа.

2. Простейшие циклы

Единичные циклы далее не рассматриваем, так как они не накладывают никаких ограничений на g. Назовём цикл ***простейшим***, если в нём есть только один вход и только один выход, причём вход не совпадает с выходом.

Рассмотрим разложение какой-нибудь подстановки в произведение независимых циклов. В каждом цикле могут быть входы и выходы. Заметим, что решение системы не зависит от того, какому именно выходу соответствует тот или иной вход. Поэтому можно как угодно изменять нумерацию разрядов числа, следя лишь за тем, чтобы в получившейся подстановке каждый вход непосредственно предшествовал какому-нибудь выходу. Решением системы будет пересечение решений подсистем (классов). Из этого сразу следуют два подхода к решению задачи для n-значных чисел.

1. Учесть только простейшие циклы с длинами от 2 до n.
2. Учесть все циклы с длинами от 2 до n.

В первом подходе мы получаем нижнюю границу множества семейств g, так как можем потерять решения, в которых используются не простейшие циклы. Заметим, что простейшие циклы всегда реализуемы.

Во втором подходе мы получаем верхнюю границу множества семейств g, потому что не каждый набор циклов может быть реализован, так чтобы в получившейся подстановке каждый вход непосредственно предшествовал какому-нибудь выходу. В частности, первый разряд не может быть выходом, а последний – входом. Ну и, конечно, в любом наборе количество входов должно совпадать с количеством выходов.

Сначала проанализируем первый подход.

Рассмотрим простейший цикл $X_1..X_n$. Выберем такую нумерацию вершин, чтобы X_n была выходом. Тогда входом будет какая-то вершина X_k, где k может принимать любые значения от 1 до n-1. Система уравнений запишется так.

$2X_1 = X_n + g$
$2X_2 = X_1$
…
$2X_{k-1} = X_{k-2}$
$2X_k + 1 = X_{k-1}$
$2X_{k+1} = X_k$
…
$2X_n = X_{n-1}$

Решая систему, получаем.

$$g = 2X_1 – X_n = … = 2^kX_k + 2^{k-1} – X_n = … = 2^nX_n + 2^{k-1} – X_n = (2^n – 1)X_n + 2^{k-1}.$$

То есть, $g = 2^{k-1} \pmod{2^n – 1}$, k = 2..n.

Рассмотрим конкретные примеры для n-разрядных чисел.

n = 2: g = 2 (mod 3).
n = 3: g = { 2, 4 } (mod 7).
n = 4: g = { 4, 8 } (mod 15) (так как g = 2 (mod 15) покрывается g = 2 (mod 3)).
n = 5: g = { 2, 4, 8, 16 } (mod 31).
n = 6: g = { 8, 16, 32 } (mod 63) (так как g = { 2, 4 } (mod 63) покрываются).

Как мы помним, множество оснований, для которых существуют n-значные g-2 числа, включает в себя и все множества оснований для g-2 чисел меньших разрядностей.

Построим последовательность оснований, для которых заведомо существуют g-2 числа (g = 2 не реализуемо, так как $2x_{(2)}$ имеет большую разрядность, чем $x_{(2)}$).

4, 5, 8, 9, 11, 14, 16, 17, 18, 19, 20…

3. Проверка

С удивлением обнаруживаем, что в списке отсутствует наша родная десятичная система, хотя примеры удвоения числа путём перестановки цифр давно известны любителям головоломок.

142857 * 2 = 285714,
1 176 470 588 235 294 * 2 = 2 352 941 176 470 588,
105 263 157 894 736 842 * 2 = 210 526 315 789 473 684,
13 004 347 826 086 956 521 739 * 2 = 26 086 956 521 739 130 043 478,
10 344 827 586 206 896 551 724 137 93 * 2 = 2 068 965 517 241 379 310 344 827 586.

Конечно же, дело в том, что используются не простейшие циклы. Проанализируем первый пример. Выходы обозначены красным.

142857
142857

285714

В символьном виде подстановка записывается так:

ABCDEF
ABCDEF

CDEFAB

А в виде произведения циклов:

(ACE)(BDF)

Выпишем и решим две получившиеся подсистемы уравнений.

2E + 1 = A + g,
2C + 1 = E,
2A = C.

$g = 2E + 1 – A$
$= 4C + 3 – A$
$= 8A + 3 – A = 7A + 3.$

$2F = B + g,$
$2D + 1 = F + g,$
$2B = D.$

$g = 2F – B$
$= 4D + 2 – 2g – B$
$= 8B + 2 – 2g – B = 7B + 2 – 2g,$
$3g = 7B + 2.$

Откуда:

$g = 7A + 3,$
$B = 3A + 1.$

При A = 1 как раз и получим рассматриваемый пример.

4. Не простейшие циклы

Теперь рассмотрим циклы $X_1..X_n$ с несколькими входами и выходами. Количество входов не обязано совпадать с количеством выходов.

Если в цикле нет выходов, то не должно быть также и входов, а все переменные цикла равны нулю. Такой цикл можно заменить набором единичных циклов, а единичные циклы мы не рассматриваем, поэтому такие циклы не интересны. Аналогично, не интересен случай, когда каждая переменная цикла является одновременно и входом, и выходом.

Выберем такую нумерацию вершин, чтобы X_1 была выходом. Параметры y_k (k = 1..n) показывают, есть ли выход из вершины X_k. Если выход есть, то $y_k = 1$, иначе $y_k = 0$. Параметры z_k (k = 1..n) показывают, есть ли вход в вершину X_k. Если вход есть, то $z_k = 1$, иначе $z_k = 0$. Система уравнений запишется так.

$2X_1 + z_1 = X_n + g$
$2X_2 + z_2 = X_1 + y_2g$
…
$2X_n + z_n = X_{n-1} + y_ng$

Решая систему, получим.

$$g = (2^n - 1)X_n + \sum_{i=1}^{n} z_i 2^{i-1} - \sum_{i=2}^{n} y_i 2^{i-1} g$$

То есть

$$g\left(\sum_{i=1}^{n} y_i 2^{i-1}\right) = (2^n - 1)X_n + \sum_{i=1}^{n} z_i 2^{i-1}$$

Обозначим:

$$Y = \sum_{i=1}^{n} y_i 2^{i-1}$$

$$Z = \sum_{i=1}^{n} z_i 2^{i-1}$$

тогда $Yg = (2^n – 1)X_n + Z$. **(2)**

Рассмотрим случай $Y = 2^n – 1$ (все вершины – выходы). Если $Z = 0$, то $X_1 = g$, что недопустимо. Если $0 < Z < 2^n – 1$, то решений нет, так как левая часть уравнения делится, на $2^n – 1$, а правая – нет. Случай, когда и $Z = 2^n – 1$, как уже было отмечено выше, не интересен. Поэтому циклы, в которых все вершины являются выходами, рассматривать также не будем.

Таким образом, любую подсистему уравнений можно описать тройкой (n, Y, Z), где $1 \le Y \le. 2^n – 3$, Y нечётно, $0 \le Z \le 2^n – 1$.

Итак, сформулированы следующие **требования** к разложению подстановки в произведение независимых циклов.

1. Общее количество входов должно совпадать с общим количеством выходов.
2. Должен быть хотя бы один вход, не являющийся выходом (самый левый).
3. Должен быть хотя бы один выход, не являющийся входом (самый правый).
4. В каждом цикле должен быть хотя бы один выход.
5. В каждом цикле должна быть хотя бы одна вершина, не являющаяся выходом.

Теорема 1.

Если требования к разложению соблюдены, то набор циклов реализуем.

Доказательство.

Соберём отдельные входы и отдельные выходы в пары (вход, выход).

Вершины, являющиеся одновременно и входами, и выходами, вставим внутрь пар.

Вершины, не являющиеся ни входами, ни выходами, добавим в конец числа.

Теорема 2.

Если разложение удовлетворяет требованиям, количество входов в цикле совпадает с количеством выходов, и этот цикл не единственный в разложении, то этот вариант разложения можно не рассматривать.

Доказательство.

1. Пусть в цикле имеются как отдельные входы, так и отдельные выходы. Отбросим остальные циклы. По теореме 1, получим реализуемую подстановку меньшей разрядности.
2. Пусть все выходы в цикле являются также и входами. Тогда в наборе остальных циклов имеются как отдельные входы, так и отдельные выходы. Отбросим рассматриваемый цикл. По теореме 1, получим реализуемую подстановку меньшей разрядности.

Так как решением системы для всей подстановки является пересечение решений подсистем для отдельных циклов, то последовательность оснований для полной подстановки покрывается последовательностью для усечённой подстановки меньшей разрядности.

Таким образом, можно сформулировать ещё одно **требование** к разложению подстановки в произведение независимых циклов.

6. Если цикл не единственный, то количество входов в цикле должно отличаться от количества выходов.

5. Подстановки, образованные одним циклом

Вооружённые новыми знаниями, ещё раз построим таблицу для трёхзначных чисел, подстановки в которых образованы единственным циклом. Количество единичных битов (выходов и входов) в двоичном представлении Y и Z должно быть одинаковым, но $Z \neq Y$, так как должны быть отдельные входы и отдельные выходы. Y должно быть нечётным, а чтобы не строить один и тот же цикл дважды, потребуем, чтобы в двухбитовом Y второй бит находился на расстоянии не больше n/2 от первого, то есть $Y = 3$.

№	выходов	Y	Z	формула	g
1	1	1	2	$g = 7X_3 + 2$	2 (mod 7)
2	1	1	4	$g = 7X_3 + 4$	4 (mod 7)
3	2	3	5	$3g = 7X_3 + 5$	4 (mod 7)
4	2	3	6	$3g = 7X_3 + 6$	2 (mod 7)

Таблица 5. n = 3.

Решения, выделенные красным цветом, показывают последовательности, не покрываемые остальными.

Небольшая табличка получилась. Тогда и для 4-значных чисел построим. Y нечётно, для двухбитовых Y: $Y \leq 5$, для трёхбитовых: $Y = 7$.

№	выходов	Y	Z	формула	g
1	1	1	2	$g = 15X_4 + 2$	2 (mod 15)
2	1	1	4	$g = 15X_4 + 4$	4 (mod 15)
3	1	1	8	$g = 15X_4 + 8$	8 (mod 15)
4	2	3	5	$3g = 15X_4 + 5$	-
5	2	3	6	$g = 5X_4 + 2$	2 (mod 5)
6	2	3	9	$g = 5X_4 + 3$	3 (mod 5)
7	2	3	10	$3g = 15X_4 + 10$	-
8	2	3	12	$g = 5X_4 + 4$	4 (mod 5)
9	2	5	3	$5g = 15X_4 + 3$	-
10	2	5	6	$5g = 15X_4 + 6$	-
11	2	5	9	$5g = 15X_4 + 9$	-
12	2	5	10	$g = 3X_4 + 2$	2 (mod 3)
13	2	5	12	$5g = 15X_4 + 12$	-
14	3	**7**	11	$7g = 15X_4 + 11$	8 (mod 15)
15	3	**7**	13	$7g = 15X_4 + 13$	4 (mod 15)
16	3	7	14	$7g = 15X_4 + 14$	2 (mod 15)

Таблица 6. n = 4.

А вот таблица для 5-значных чисел богата сюрпризами. Казалось бы, так как $2^5 – 1 = 31$ – простое число, то решениями будут только g = { 2, 4, 8, 16 } (mod 31), однако ж нет. Y нечётно, для двухбитовых Y: $Y \le 5$, для трёхбитовых: $Y \le 11$, для 4-битовых: $Y = 15$.

№	выходов	Y	Z	формула	g
1	1	1	2	$g = 31X_4 + 2$	2 (mod 31)
2	1	1	4	$g = 31X_4 + 4$	4 (mod 31)
3	1	1	8	$g = 31X_4 + 8$	8 (mod 31)
4	1	1	16	$g = 31X_4 + 8$	16 (mod 31)
5	2	3	5	$3g = 31X_4 + 5$	12 (mod 31)
6	2	3	6	$3g = 31X_4 + 6$	2 (mod 31)
7	2	3	9	$3g = 31X_4 + 9$	3 (mod 31)
8	2	3	10	$3g = 31X_4 + 10$	24 (mod 31)
9	2	3	12	$3g = 31X_4 + 12$	4 (mod 31)
10	2	3	17	$3g = 31X_4 + 17$	16 (mod 31)
11	2	3	18	$3g = 31X_4 + 18$	6 (mod 31)
12	2	3	20	$3g = 31X_4 + 20$	17 (mod 31)
13	2	3	24	$3g = 31X_4 + 24$	8 (mod 31)
14	2	5	3	$5g = 31X_4 + 3$	13 (mod 31)
15	2	5	6	$5g = 31X_4 + 6$	26 (mod 31)
16	2	5	9	$5g = 31X_4 + 9$	8 (mod 31)
17	2	5	10	$5g = 31X_4 + 10$	2 (mod 31)
18	2	5	12	$5g = 31X_4 + 12$	21 (mod 31)
19	2	5	17	$5g = 31X_4 + 17$	22 (mod 31)
20	2	5	18	$5g = 31X_4 + 18$	16 (mod 31)
21	2	5	20	$5g = 31X_4 + 20$	4 (mod 31)
22	2	5	24	$5g = 31X_4 + 24$	11 (mod 31)

№	выходов	Y	Z	формула	g
23	3	7	11	$7g = 31X_4 + 11$	6 (mod 31)
24	3	7	13	$7g = 31X_4 + 13$	24 (mod 31)
25	3	7	14	$7g = 31X_4 + 14$	2 (mod 31)
26	3	7	19	$7g = 31X_4 + 19$	16 (mod 31)
27	3	7	21	$7g = 31X_4 + 21$	3 (mod 31)
28	3	7	22	$7g = 31X_4 + 22$	12 (mod 31)
29	3	7	25	$7g = 31X_4 + 25$	8 (mod 31)
30	3	7	26	$7g = 31X_4 + 26$	17 (mod 31)
31	3	7	28	$7g = 31X_4 + 28$	4 (mod 31)
32	3	11	7	$11g = 31X_4 + 7$	26 (mod 31)
33	3	11	13	$11g = 31X_4 + 13$	4 (mod 31)
34	3	11	14	$11g = 31X_4 + 14$	7 (mod 31)
35	3	11	19	$11g = 31X_4 + 19$	13 (mod 31)
36	3	11	21	$11g = 31X_4 + 21$	16 (mod 31)
37	3	11	22	$11g = 31X_4 + 22$	2 (mod 31)
38	3	11	25	$11g = 31X_4 + 25$	22 (mod 31)
39	3	11	26	$11g = 31X_4 + 26$	8 (mod 31)
40	3	11	28	$11g = 31X_4 + 28$	11 (mod 31)
41	4	15	23	$15g = 31X_4 + 23$	16 (mod 31)
42	4	15	27	$15g = 31X_4 + 27$	8 (mod 31)
43	4	15	29	$15g = 31X_4 + 29$	4 (mod 31)
44	4	15	30	$15g = 31X_4 + 30$	2 (mod 31)

Таблица 7. n = 5.

6. 4-значные числа

Для 4-значных чисел возможны подстановки, раскладывающиеся в произведение двух циклов длины 2. Существует всего один вариант, раскладывающийся в два допустимых не простейших цикла.

1. В одном цикле – один выход и два входа, в другом – один выход, а входов нет. В виде (n, Y, Z) этот набор циклов записывается как (2, 1, 3)(2, 1, 0).

ABCD
ABCD

DCBA

А в виде произведения циклов:

(CB) (DA)

Выпишем и решим две получившиеся подсистемы уравнений.

$2C + 1 = B + g,$
$2B + 1 = C.$
$g = 2C + 1 – B = 4B + 2 + 1 – B = 3B + 3.$

$2D = A + g$,
$2A = D$.
$g = 2D – A = 4A – A = 3A$.

Откуда:
$g = 3B + 3$,
$A = B + 1$.

Положим $B = 0$, тогда $g = 3$, $A = 1$, $C = 1$, $D = 2$.

$1012_{(3)}$
$1012_{(3)}$

$2101_{(3)}$

Таким образом, для 4-значных чисел, кроме решений с одним циклом, имеется одно решение с двумя циклами: $g = 0 \pmod 3$, а всего получается:

$g = \{ 0, 2 \} \pmod 3$.
$g = \{ 2, 3, 4 \} \pmod 5$.
$g = \{ 2, 4 \} \pmod 7$.

7. 5-значные числа

Для 5-значных чисел возможны подстановки, раскладывающиеся в произведение двух циклов длины 2 и 3. Есть 4 варианта подстановок, раскладывающихся в два допустимых не простейших цикла.

1. В цикле длины 2 – один выход и нет входов, а в цикле длины 3 – один выход и два входа.
2. В цикле длины 2 – один выход и нет входов, а в цикле длины 3 – два выхода и три входа.
3. В цикле длины 2 – один выход и два входа, а в цикле длины 3 – один выход, а входов нет.
4. В цикле длины 2 – один выход и два входа, а в цикле длины 3 – три выхода и два входа.

Поскольку решением системы является пересечение решений подсистем, то последовательности оснований для всех вариантов покрываются последовательностями для 4-значных чисел. Поэтому для 5-значных чисел разложение в два цикла ничего статистически нового не даёт, а всего получается:

$g = \{ 0, 2 \} \pmod 3$.
$g = \{ 2, 3, 4 \} \pmod 5$.
$g = \{ 2, 4 \} \pmod 7$.
$g = \{ 2, 3, 4, 6, 7, 8, 11, 12, 13, 16, 17, 21, 22, 24, 26 \} \pmod{31}$.

Заметим, что нашей родной десятичной системы в списке так и нет. Она появится только на 6-значных числах.

8. Задача

а) Найдётся ли такое n, что n-значные g-2 числа существуют для всех оснований, начиная с некоторого?
б) Верно ли, что для любых оснований g, начиная с некоторого, существует g-2 число?

Решение не приводится. Вдруг ведущий захочет включить эту задачу в один из следующих туров Марафона.

9. g-m числа

Можно обобщить задачу и в другом направлении, увеличивая не разрядность, а множитель.

$14_{(11)}$
$14_{(11)}$
$14_{(11)}$

$41_{(11)}$

$15_{(19)}$
$15_{(19)}$
$15_{(19)}$
$15_{(19)}$

$51_{(19)}$

И т.д. $A = 1$, $B = m + 1$, $g = mB – 1$.