О. Б. Полубасов   30.05.2013 г.

========= 176 ==========

ММ176 (5 баллов)

Решения принимаются, по крайней мере, до 30.05.13

Сколько точек экстремума, не являющихся точками разрыва, имеет функция $f(x) = \{x\} + \{x^2\} + \{x\}^2$?

Примечание: $\{x\}$ - дробная часть числа x.

========================

Пусть $g(x) = \{x\}^2 + \{x\}$. Функция имеет разрывы в целых числах, а на промежутках между ними монотонно возрастает от 0 до 2 (не достигая 2).

Пусть $h(x) = \{x^2\}$. Функция имеет разрывы, когда x^2 – целое, кроме нуля. При положительных x на промежутках между разрывами функция монотонно возрастает от 0 до 1 (не достигая 1), поэтому и f(x) = g(x) + h(x) при положительных x монотонно возрастает на промежутках между разрывами, а значит, экстремумов не имеет.

При x = 0 функция h(x) не имеет разрыва, а g(x) – имеет, следовательно, и f(x) имеет разрыв.

При отрицательных x между точками разрыва функция h(x) монотонно убывает от 1 до 0 (не достигая 1), поэтому при отрицательных x функция f(x) может иметь экстремумы.

Так как у функций g(x) и h(x) в точках разрыва скачки происходят на разную величину, то и функция f(x) имеет разрывы в этих точках, поэтому экстремумы следует искать в областях непрерывности g(x) и h(x).

x = i + {x}, где i – отрицательное целое.

$f(x) = \{x\}^2 + \{x\} + \{i^2 + 2i\{x\} + \{x\}^2\}$.

Взятие дробной части на производную не влияет.

df/d{x} = 4{x} + 2i + 1 = 0, {x} = (-2i – 1)/4, {x} \in [0; 1).

i = -1: {x} = 1/4, x = -3/4, f(x) = 0.875.

i = -2: {x} = 3/4, x = -5/4, f(x) = 1.875.

Ответ. Функция f(x) имеет две точки экстремума (а именно, минимумы), не являющиеся точками разрыва: -3/4 и -5/4.

ОБОБЩЕНИЕ

Не очень интересная функция. Хотелось бы, чтобы функция f имела разрывы не во всех точках разрыва функций g и h.

1. Рассмотрим функцию $f(x) = \{x\} + 2\{x^2\} + \{x\}^2$

Пусть $g(x) = \{x\}^2 + \{x\}$. Функция имеет разрывы в целых числах, а на промежутках между ними монотонно возрастает от 0 до 2 (не достигая 2).

Пусть $h(x) = 2\{x^2\}$. Функция имеет разрывы, когда x^2 – целое, кроме нуля. При положительных x на промежутках между разрывами функция монотонно возрастает от 0 до 2 (не достигая 2), поэтому и f(x) = g(x) + h(x) при положительных x монотонно возрастает на промежутках между разрывами, а значит, экстремумов не имеет.

При x = 0 функция h(x) не имеет разрыва, а g(x) – имеет, следовательно, и f(x) имеет разрыв.

При отрицательных x между точками разрыва функция h(x) монотонно убывает от 2 до 0 (не достигая 2), поэтому при отрицательных x функция f(x) может иметь экстремумы.

Так как у функций g(x) и h(x) в целых числах скачки происходят на одинаковую величину 2, но при отрицательных x в разные стороны, то f(x) на каждом отрицательном целом x прыгает от почти 2 до 0, а потом снова до почти 2, то есть разрывы устранимые. Но даже и устранимые разрывы – это разрывы, следовательно, ничего принципиально нового мы не получили, просто анализ этой функции немного интереснее.

x = i + {x}, где i – отрицательное целое.
$f(x) = \{x\}^2 + \{x\} + 2\{i^2 + 2i\{x\} + \{x\}^2\}$.
df/d{x} = 6{x} + 4i + 1 = 0, {x} = (-4i – 1)/6, {x} \in [0; 1).
i = -1: {x} = 1/2, x = -1/2, f(x) = 1.25. Единственный минимум.

2. Рассмотрим функцию $f(x) = \{x\} – 2\{x^2\} + \{x\}^2$

Пусть $g(x) = \{x\}^2 + \{x\}$. Функция имеет разрывы в целых числах, а на промежутках между ними монотонно возрастает от 0 до 2 (не достигая 2).

Пусть $h(x) = -2\{x^2\}$. Функция имеет разрывы, когда x^2 – целое, кроме нуля. При отрицательных x между точками разрыва функция h(x) монотонно возрастает от -2 до 0 (не достигая -2), поэтому и f(x) = g(x) + h(x) при отрицательных x монотонно возрастает на промежутках между разрывами, а значит, экстремумов не имеет.

При x = 0 функция h(x) не имеет разрыва, а g(x) – имеет, следовательно, и f(x) имеет разрыв.

При положительных x на промежутках между разрывами функция h(x) монотонно убывает от 0 до -2 (не достигая -2), поэтому при положительных x функция f(x) может иметь экстремумы.

Так как у функций g(x) и h(x) в положительных целых x скачки происходят на одинаковую величину 2, но в разные стороны, то в этих точках нет разрывов. Но нет и экстремумов, функция убывает, переходя через 0.

$x = i + \{x\}$, где i – неотрицательное целое.
$f(x) = \{x\}^2 + \{x\} - 2\{i^2 + 2i\{x\} + \{x\}^2\}$.
$df/d\{x\} = -2\{x\} - 4i + 1 = 0$, $\{x\} = (1 - 4i)/2$, $\{x\}$ \in [0; 1).
$i = 0$: $\{x\} = 1/2$, $x = 1/2$, $f(x) = 0.25$. Единственный максимум.

Тоже не очень интересно. Нельзя ли получить экстремумы функции f(x) в некоторых точках разрыва функций g(x) и h(x), но в конечном их числе?

3. Рассмотрим функцию $f(x) = \{x\} - \{x\}^2$

Непрерывная периодическая функция, имеющая острые минимумы (0) в целых числах и гладкие максимумы (0.25) в полуцелых, но не целых. Это опять не совсем то, что хотелось.

4. Рассмотрим функцию $f(x) = \{x\} - 2\{x^2\} + \{x^3\}$

Пусть $g(x) = \{x\} + \{x^3\}$. Функция имеет разрывы, когда x^3 – целое, а на промежутках между ними монотонно возрастает.

Пусть $h(x) = -2\{x^2\}$. Функция имеет разрывы, когда x^2 – целое, кроме нуля. При отрицательных x между точками разрыва функция h(x) монотонно возрастает от -2 до 0 (не достигая -2), поэтому и f(x) = g(x) + h(x) при отрицательных x монотонно возрастает на промежутках между разрывами, а значит, экстремумов не имеет.

При x = 0 функция h(x) не имеет разрыва, а g(x) – имеет, следовательно, и f(x) имеет разрыв.

При положительных x на промежутках между разрывами функция h(x) монотонно убывает от 0 до -2 (не достигая -2), поэтому при положительных x функция f(x) может иметь экстремумы.

Так как у функций g(x) и h(x) в положительных целых x скачки происходят на одинаковую величину 2, но в разные стороны, то у функции f(x) в положительных целых x нет разрывов. Но есть ли экстремумы?

$df/dx = 3x^2 - 4x + 1 = 0$.
$x = 1/3$, $f(x) = 4/27$. Гладкий максимум.
$x = 1$, $f(x) = 0$. Замечательный гладкий минимум.

При других положительных целых x функция f(x) возрастает, проходя через 0.

Вот это – то, чего хотелось.