О. Б. Полубасов   29.06.2013 г.

========= 180 ==========

MM180 (13 баллов)

Решения принимаются, по крайней мере, до 5.07.13

Назовем натуральное число "трижды нечетным", если само число, сумма его делителей и сумма суммы его делителей нечетны. Может ли "трижды нечетное" число быть кратно 821?

======================

Понятно, что дважды нечётными числами являются нечётные квадраты и только они. Чтобы число x было трижды нечётным, необходимо чтобы σ(x) было дважды нечётным, то есть тоже было квадратом.

Пусть f(x) - множество простых чисел, имеющих нечётный показатель в каноническом разложении σ(x). Например, $f(2819^2) = \{ 61 \}$, так как $\sigma(2819^2) = 19^4 * 61$. В силу мультипликативности функции σ, если x и y взаимно просты, то f(xy) равно симметрической разности f(x) и f(y).

821 – простое число. Чтобы x делилось на 821 и при этом было квадратом, необходимо чтобы 821 входило в разложение x в чётной степени. Остальные множители должны скомпенсировать элементы $f(821^{2k})$. Так как $f(821^4)$ и $f(821^6)$ содержат большие числа, к которым трудно подобрать пару, то будем искать ответ на задачу среди чисел $x = 821^2y^2$, где y не кратно 821.

i	p_i	$f(p_i)$	$f\left(\prod p_i\right)$
1	821^2	7, 229, 421	7, 229, 421
2	13913^2	7, 13, 31, 163, 421	13, 31, 163, 229
3	4903^2	3, 31, 229, 1129	3, 13, 163, 1129
4	2999^2	13, 613, 1129	3, 163, 613
5	547^2	3, 163, 613	ø

Таблица 1. Решение, полученное подбором сомножителей вручную.

$$\sigma((547*821*2999*4903*13913)^2) = 3^2*7^2*13^2*31^2*163^2*229^2*421^2*613^2*1129^2.$$

Увлекательный паззл! Рубишь одну голову – вырастают две. В эту игру можно играть в одиночку, вдвоём или компанией. Но всё же, лучше регуляризовать подбор сомножителей. Рассмотрим множество простых p < 40000, в каноническое разложение $\sigma(p^2)$ которых входят только простые q < 100000 и их степени. Из таблицы 1 ясно, что при таких ограничениях хотя бы одно решение существует.

Построим двудольный граф (P, Q). Ребро (p, q) существует, если q входит в $f(p^2)$. Матрица смежности графа (P, Q) представляет собой прямоугольную (0,1)-матрицу размером 1802x1347.

Комбинаторная постановка задачи

Дана прямоугольная (0,1)-матрица. Одна строка уже выбрана.

Необходимо выбрать ещё несколько строк, чтобы в получившемся наборе строк в каждом столбце оказалось чётное количество единиц.

Редукция матрицы

Пусть столбец содержит ровно одну единицу, тогда инцидентная ему строка не может входить в решение, поэтому эту строку и этот столбец можно удалить.

Размер матрицы уменьшился до 896x370.

Пусть столбец содержит ровно две единицы, тогда две соответствующие строки входят в решение только совместно (либо обе входят, либо обе не входят), поэтому эти две строки можно объединить в одну (используя сложение по модулю 2), а столбец удалить.

Размер матрицы уменьшился до 703x177.

Алгоритм

Изначально набор содержит одну строку, в строке три единицы. Так как всё равно придётся покрыть все три единицы, то перебор вариантов второй строки набора можно делать по любому одному столбцу из трёх. Выгодно выбрать столбец, содержащий наименьшее количество единиц.

На втором уровне набор содержит уже две строки, чётность столбцов набора изменилась, и перебор вариантов третьей строки набора опять выгодно делать по столбцу, содержащему меньшее количество оставшихся единиц.

И так далее рекурсивно, пока в наборе не останется нечётных столбцов, либо пока не будет достигнута заданная глубина поиска.

В среднем, столбцы содержат около 10 единиц, а так как среди них выбирается самый бедный, то перебор получается быстрым, каждую секунду программа находит примерно по 200 решений.

Решений оказалось очень много даже при указанных выше ограничениях (без ограничений, понятно, решений бесконечно много). В таблице 2 приведена зависимость количества найденных решений от числа строк в наборе (исходных строк, а не объединённых).

число строк в наборе	число решений
5	3
6	27
7	277
8	3316
9	36077

Таблица 2. Зависимость количества найденных решений от числа строк в наборе.

В таблице 3 приведены все найденные решения, в которых искомое число x меньше 10^{36}, в порядке возрастания. Любопытно сравнить две последние строки таблицы, а также вторую с третьей.

№	x	σ(x)
1	$(3*79*239*821*1283*6277)^2$	$3^2*7^4*13^2*19^2*43^2*229^2*421^2*3019^2$
2	$(397*821*919*7193*13913)^2$	$3^2*7^4*13^2*19^2*31^2*163^2*229^2*421^2*1699^2$
3	$(3*5*11*79*397*821*1283*7193)^2$	$3^2*7^6*13^2*19^2*31^2*43^2*229^2*421^2*1699^2$
4	$(547*821*2999*4903*13913)^2$	$3^2*7^2*13^2*31^2*163^2*229^2*421^2*613^2*1129^2$
5	$(5*11*13*821*1283*10399*15629)^2$	$3^2*7^4*13^2*19^2*31^2*43^2*61^2*229^2*421^2*523^2$
6	$(821*1663*4027*4909*6091)^2$	$3^4*7^4*19^2*193^2*229^2*313^2*421^2*3373^2$
7	$(3*5*7*821*13913*14561*34171)^2$	$3^2*7^4*13^2*19^2*31^2*163^2*229^2*421^2*48733^2$
8	$(5*11*239*821*919*6277*13913)^2$	$3^2*7^4*13^2*19^4*31^2*163^2*229^2*421^2*3019^2$

Таблица 3. Решения, в которых x меньше 10^{36}, в порядке возрастания.

Подчеркнём, что значения в таблицах действительны только при указанных выше ограничениях на решения. При менее строгих ограничениях рекорды могут улучшиться. Можно попытаться построить решение и из двух строк. Если $x = 821^2y^2$, где y – простое, то y находится из решения уравнения $y^2 + y + 1 = 7*229*421*z^2$, где z – может быть любым целым больше 1. Но из-за большой величины y и требования к его простоте решить такое уравнение затруднительно.

Включение в граф не только простых чисел, но и их степеней при ограничении $p^k < 40000$ не принесло почти ничего нового. Единственно что, так как $\sigma(3^4) = 11^2$, а x из второй и четвёртой строчек таблицы 3 не делятся на 3, то домножив эти x на 3^4, мы вновь получим трижды нечётные числа, меньшие 10^{36}.

№	x	σ(x)
2	$(3^2*397*821*919*7193*13913)^2$	$3^2*7^4*11^2*13^2*19^2*31^2*163^2*229^2*421^2*1699^2$
4	$(3^2*547*821*2999*4903*13913)^2$	$3^2*7^2*11^2*13^2*31^2*163^2*229^2*421^2*613^2*1129^2$

Таблица 4. Решения, полученные домножением x на 3^4.

Остальные x из таблицы 3 либо делятся на 3, либо превышают $10^{36}/3^4$.

Ответ. Да. Например, $(547*821*2999*4903*13913)^2$.

Четырежды нечётных чисел, кратных 821, найти не удалось. Улыбнёмся тому, что существует «бесконечно нечётное» натуральное число (не кратное 821).