О. Б. Полубасов   12.10.2013 г.

========= MM181 ==========

Разминка

MM181 (3 балла)

Решения принимаются, по крайней мере, до 17.10.13

Существует ли натуральное число n, среди остатков от деления которого на все натуральные числа меньшие n чаще всего встречается остаток 2013?

==========================

Понятно, что n следует искать среди n = m + 2013, где m имеет много делителей. Вот первая дюжина из подходящих чисел.

№	m	n = m + 2013	кол-во x: n mod x = 2013	макс. кол-во x: n mod x = z	z
1	$2^7*3^2*5*7*13$	526173	68	59	33
2	$2^5*3^2*5^2*7*11$	556413	76	72	93
3	$2^5*3^3*5*7*19$	576573	70	69	123
4	$2^6*3^3*5*7*13$	788253	86	75	333
5	$2^4*3^3*5^2*7*11$	833613	92	91	333
6	$2^5*3^2*5^2*7*17$	858813	85	83	813
7	$2^4*3^4*5*7*19$	863853	79	73	393
8	$2^5*3^3*7*11*13$	866877	76	69	557
9	$2^6*3*5*7*11*13$	962973	90	86	93
10	$2^4*3^3*5^2*7*13$	984813	95	77	753
11	$2^3*3^3*5*7*11*13$	1083093	103	83	213
12	2^7*3*5^2*7*17	1144413	80	74	963

Таблица 1.

Ответ. Да. Наименьшее из них – $526173 = 2^7*3^2*5*7*13 + 2013$.

Обобщение. Очевидно, что искомых чисел бесконечно много. Чтобы это доказать, достаточно указать какую-нибудь бесконечную серию.

Свойство 1. Рассмотрим последовательность таких чисел m, что все числа, меньшие m, имеют меньше делителей. Ясно, что такая последовательность существует, единственна и бесконечна (и, наверняка, имеет какой-нибудь номер в классификаторе). Известно, что все члены этой последовательности имеют вид $\sum_{i=1}^{k} p_i^{s_i}$, где p_i – это k первых простых чисел, $s_{i+1} \le s_i$ (пусть $s_{i+1} > s_i$, тогда, поменяв местами степени, получим меньшее число с тем же количеством делителей).

Свойство 2. Начиная с некоторого M, все члены последовательности станут кратными всем числам от 1 до 2013.

Свойство 3. Выберем те из них, для которых выполняется: все меньшие числа имеют меньше делителей, больших 2013. Понятно, что таких членов тоже бесконечно много (можно доказать, что свойство 3 вытекает из первых двух, но сейчас нам это не требуется).

Рассмотрим любой из таких членов m. Пусть m имеет ровно w делителей, из них w–2013 делителей больше 2013. Пусть n = m + 2013. Тогда уравнение n mod x = 2013 имеет ровно w–2013 корней. Заметим, что, по свойству 2, m кратно всем числам от 1 до 2013, в том числе, и всем простым. Так как в этом диапазоне имеется 305 простых чисел, то $w \geq 2^{305}$. На фоне этого числа разница в 2013 составляет исчезающе малый процент.

1. Если 2013 < z < n, то n–z < m, а значит, по свойству 3, число n-z имеет меньше делителей, больших 2013, чем m. То есть, уравнение n mod x = z имеет меньше чем w–2013 корней, меньших n.

2. Пусть теперь z < 2013.

Предположим, что число n – z = m + (2013 – z) имеет не меньше чем w–2013 делителей.

Так как, по свойству 2, m кратно всем числам от 1 до 2013, n = m + 2013, то для любого натурального x ≤ 2013 выполняется: n mod x = 2013 mod x.

Поскольку уже 2*3*5*7*11 = 2310 > 2013, то, во-первых, число n – z имеет не более 4 различных простых делителей, меньших 2013, а остальные простые делители должны быть больше чем 2013, то есть, не меньше чем 2017. А во-вторых, хотя бы одно из чисел {2, 3, 5, 7, 11} не входит в каноническое разложение числа n–z.

Пусть в разложение n–z не входит число a из множества {2, 3, 5, 7, 11}, и входит число b ≥ 2017. Построим число $y = (n – z) * a^2 / b$.

С одной стороны, y ≤ (n – z)*121/2017 = m*121/2017 + (2013 – z)*121/2017 < m.

С другой стороны, количество делителей y не меньше чем в 3/2 раза превышает количество делителей числа n–z, то есть составляет не менее чем 1.5(w–2013) и намного превышает количество делителей числа m, равное w.

Но, по построению (свойство 1), все числа, меньшие m, имеют меньше делителей. Противоречие.

3. Осталось рассмотреть случай, когда в каноническое разложение числа n–z входят только простые числа, меньшие 2013. Выберем число b, входящее в разложение с наибольшей степенью. Так как, произведение простых чисел, входящих в разложение, не превышает 2013, а $n–z > m \geq \prod_{p_k - \text{простое} < 2013} p_k > 2013^{100}$ (очень грубая оценка), то наибольшая степень больше чем 100.

Пусть в разложение n–z не входит число a из множества {2, 3, 5, 7, 11}. Построим число $y = (n – z) * a / b^4$.

С одной стороны, $y \leq (n – z)*11/2^4$ = m*11/16 + (2013 – z) *11/16 < m.

С другой стороны, количество делителей числа y не меньше чем в 2*(100 – 4)/100 раз превышает количество делителей числа n–z, то есть составляет не менее чем (w–2013)*48/25 и намного превышает количество делителей числа m, равное w. Но, по построению (свойство 1), все числа, меньшие m, имеют меньше делителей. Противоречие. Следовательно, и при z < 2013 уравнение n mod x = z имеет меньше чем w–2013 корней, меньших n.