О. Б. Полубасов   05.10.2013 г.

========= ММ182 ==========

Продолжаем разминаться

ММ182 (3 балла)

Решения принимаются, по крайней мере, до 22.10.13

Назовем натуральное число n суперделимым, если:

1) в каноническом разложении n имеется более двух простых делителя;

2) для любого собственного подмножества множества простых делителей n число n кратно сумме элементов этого подмножества.

Доказать, что существует бесконечно много суперделимых чисел.

========================

1. Пусть множество простых делителей суперделимого числа n равно $\{p_1, p_2, p_3, \ldots, p_m\}$, $m \geq 3$, $p_1 < p_2 < p_3 < \ldots < p_m$. Тогда $p_2 + p_3$ чётно, а следовательно, $p_1 = \mathbf{2}$.

2. Предположим, что $m = 3$. Тогда $p_1 + p_2 = p_2 + 2$ должно делиться на p_3, то есть $p_3 = p_2 + 2$.

Если $p_2 = 1 \bmod 3$, то $p_3 = 0 \bmod 3$, то есть $p_3 = 3$. $p_2 = p_3 - 2 = 1$. Невозможно.

Если $p_2 = 2 \bmod 3$, то $p_3 = 1 \bmod 3$, $p_2 + p_3 = 0 \bmod 3$. Тогда число 3 должно входить в набор делителей, то есть $p_2 = 3$. Противоречие.

Следовательно $p_2 = 3$, $p_3 = 3 + 2 = 5$, $n = 2^a 3^b 5^c$.

Но $2^a 3^b 5^c$ не делится на $5 + 2 = 7$, а значит, число n – не суперделимое.

Таким образом, среди чисел вида $n = p^a q^b r^c$ нет суперделимых.

3. Пусть теперь $m \geq 4$.

Если в каноническое разложение входит простое вида $p = 6k + 1$, то $p + 2$ кратно 3, поэтому 3 должно входить в каноническое разложение n.

Если же все нечётные простые множители имеют вид $p_i = 6k - 1$, то $p_3 + p_4 + 2$ кратно 3, поэтому **3** должно входить в каноническое разложение n.

4. Так как в разложение входят 2 и 3, то входит и их сумма 2 + 3 = **5**.

Но тогда в разложение входит и сумма 2 + 5 = **7**.

Следовательно, в каноническое разложение любого суперделимого числа, имеющего больше двух простых делителей, обязательно входят числа 2, 3, 5 и 7.

Пусть множество простых делителей n равно {2, 3, 5, 7}. Выпишем суммы элементов всех собственных подмножеств.

$2 + 3 = 5$,
$2 + 5 = 7$,
$2 + 7 = 9 = 3^2$,
$3 + 5 = 8 = 2^3$,
$3 + 7 = 10 = 2*5$,

$5 + 7 = 12 = 2^2*3$.
$2 + 3 + 5 = 10 = 2*5$,
$2 + 3 + 7 = 12 = 2^2*3$,
$2 + 5 + 7 = 14 = 2*7$,
$3 + 5 + 7 = 15 = 3*5$.

Таким образом, любое число $n = 2^a3^b5^c7^d$, где $a \geq 3$, $b \geq 2$, удовлетворяет условию задачи.

Ответ. Любое число $n = 2^a3^b5^c7^d$, где $a \geq 3$, $b \geq 2$, является суперделимым. Наименьшее из суперделимых чисел равно $2^33^25*7 = 2520$.

Обобщение. Существуют ли суперделимые числа с другими наборами простых делителей?

Теорема 1. Любое целое число от 12 до 24, может быть представлено в виде суммы нескольких (не всех) меньших простых чисел без повторений.

Доказательство. Проверяется непосредственно.

Теорема 2. Любое целое число N, большее 24, может быть представлено в виде суммы нескольких (не всех) простых чисел без повторений, причём можно выбрать все эти простые меньшими чем $N – 11$.

Доказательство. (Утверждение кажется очевидным, но на что сослаться, не знаю, приходится доказывать.)

Базис индукции. Для чисел от 25 до 56 утверждение верно (проверяется непосредственно).

Индуктивный переход. Пусть утверждение верно для чисел от 25 до $N \geq 56$. Рассмотрим m, такое что $N+1 \leq m \leq 2N – 9$.

Между числами $|(m – 11)/2|$ и $m – 11$ есть хотя бы одно простое (пусть p), $|(m – 9)/2| \leq p \leq m – 12$. (|| – антье.)

1) Пусть $m – p \leq p$.

Тогда $m – p \geq m – (m – 12) \geq 12$.

С другой стороны, $m – p \leq m – |(m – 9)/2| \leq |(m + 9)/2| \leq |(2N – 9 + 9)/2| = N$.

По утверждению теоремы 1 и индуктивному предположению, $m – p$ можно представить в виде суммы нескольких (не всех) меньших простых чисел без повторений. Добавив к сумме число p, получим m. Утверждение доказано.

2) Пусть теперь $m – p > p$.

Тогда $m – p > |(m – 9)/2| \geq |(N + 1 – 9)/2| \geq |48/2| = 24$.

С другой стороны, $m – p \leq m – |(m – 9)/2| \leq |(m + 9)/2| \leq |(2N – 9 + 9)/2| = N$.

По индуктивному предположению, $m – p$ можно представить в виде суммы нескольких (не всех) меньших простых чисел без повторений. Причём, все эти простые меньше чем $(m – p) – 11 \leq m – |(m – 9)/2| – 11 \leq |(m – 13)/2| \leq p$. Добавив к сумме число p, получим m. Утверждение доказано.

Следствие 1. Любое целое число, большее 11, может быть представлено в виде суммы нескольких (не всех) меньших простых чисел без повторений.

5. Если множество простых делителей суперделимого числа n, кроме набора {2, 3, 5, 7}, содержит ещё какое-нибудь число, то оно должно содержать и 2 + 3 + 5 + 7 = **17**. Выпишем суммы элементов некоторых подмножеств.

17 + 5 = 22 = 2***11**,
11 + 2 = **13**.

Сейчас набор уже содержит все простые от 2 до 17.

Пусть набор содержит все простые числа от 2 до $p_k \geq 11$. По следствию 1, следующее простое число p_{k+1} может быть представлено в виде суммы нескольких (не всех) чисел от 2 до p_k без повторений. Чтобы поддержать свойство суперделимости n, необходимо добавить в набор его простых делителей число p_{k+1}. Так как множество простых чисел бесконечно, то процесс добавления новых простых чисел никогда не закончится, то есть, никакое множество мощности больше 4 не замкнуто относительно рассматриваемой операции.

Итак, существует всего одно семейство суперделимых чисел:
$n = 2^a 3^b 5^c 7^d$, где $a \geq 3$, $b \geq 2$. Других суперделимых чисел не существует.