О. Б. Полубасов   06.10.2013 г.

========= ММ183 ==========

Легкая задача с очевидным неочевидным обобщением

ММ183 (3 балла)

Решения принимаются, по крайней мере, до 31.10.13

Про пять чисел a, b, c, d, e известно, что $a < b < c < d < e$. Попарные суммы этих чисел выписали в порядке неубывания. Найти число вариантов расположения сумм в этом списке в зависимости от конкретных значений исходных чисел.

========================

Выпишем очевидные неравенства – следствия.

a+b < a+c < a+d < a+e,
a+b < b+c < b+d < b+e,
a+c < b+c < c+d < c+e,
a+d < b+d < c+d < d+e,
a+e < b+e < c+e < d+e.

Нарисуем граф частичного порядка (рис. 1). Дуга xy существует, если x < y. Транзитивные замыкания не показаны.

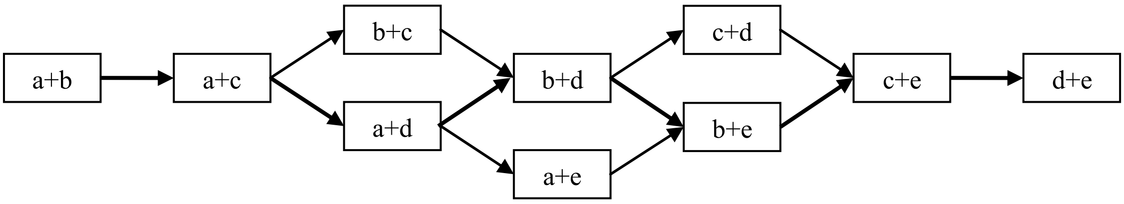

Рис. 1. Отношение частичного порядка на множестве попарных сумм.

Рассмотрим цепочку a+b < a+c < a+d < b+d < b+e < c+e < d+e.

1. Вершину b+c можно вставить где-нибудь между a+c и b+d (2 варианта).
2. Вершину c+d можно вставить где-нибудь между b+d и c+e (2 варианта).
3. Вершину a+e можно вставить где-нибудь между a+d и b+e (2, 3 или 4 варианта, в зависимости от места вставки предыдущих вершин).

На рис. 2.1 – 2.4 приведены 2*2=4 варианта вставки в цепочку вершин b+c и c+d. На рис. 3.1.1 – 3.4.4 приведены все 2+3+3+4=12 вариантов вставки в цепочку вершины a+e и проверена их реализуемость.

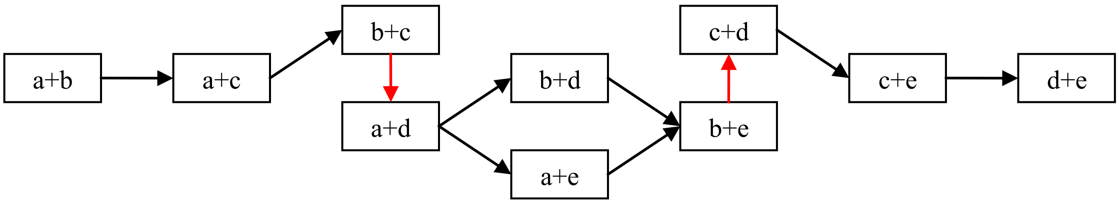

Рис. 2.1. Возможны 2 варианта вставки в цепочку вершины a+e.

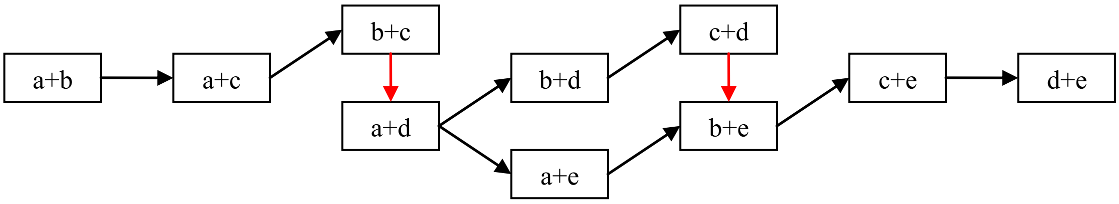

Рис. 2.2. Возможны 3 варианта вставки в цепочку вершины a+e.

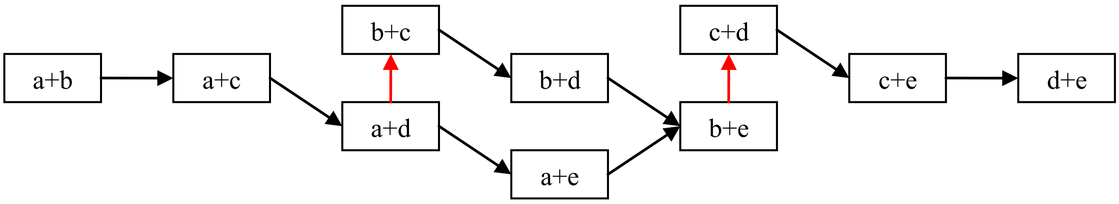

Рис. 2.3. Возможны 3 варианта вставки в цепочку вершины a+e.

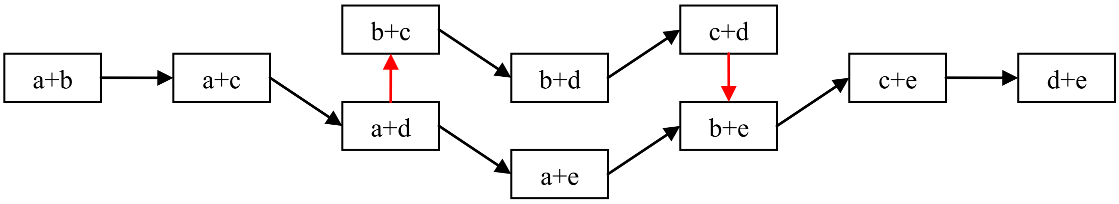

Рис. 2.4. Возможны 4 варианта вставки в цепочку вершины a+e.

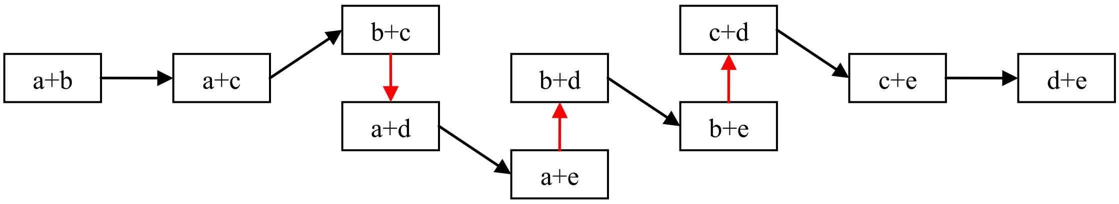

Рис. 3.1.1. a = 1, b = 2, c = 3, d = 4, e = 5. 3 < 4 < 5 = 5 < 6 = 6 < 7 = 7 < 8 < 9.

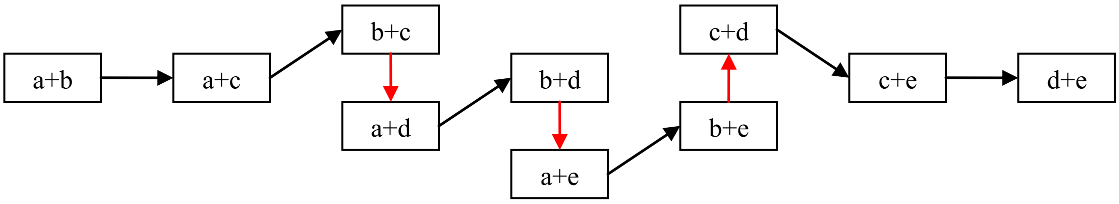

Рис. 3.1.2. a = 1, b = 2, c = 3, d = 4, e = 5. 3 < 4 < 5 = 5 < 6 = 6 < 7 = 7 < 8 < 9.

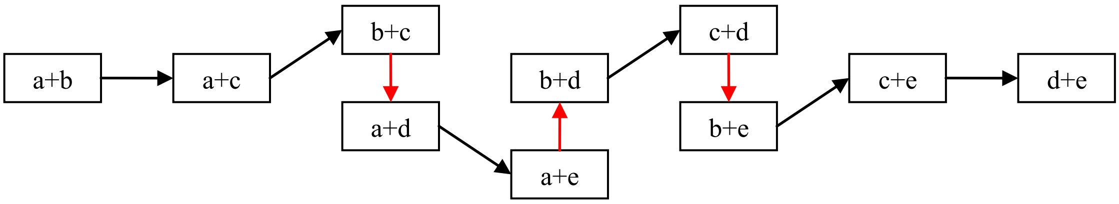

Рис. 3.2.1. $a = 1, b = 2, c = 3, d = 4, e = 5$. $3 < 4 < 5 = 5 < 6 = 6 < 7 = 7 < 8 < 9$.

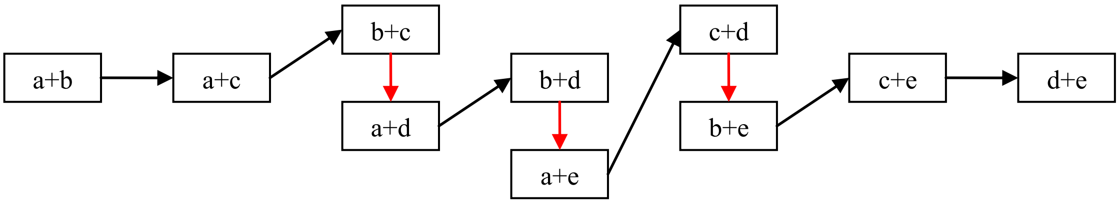

Рис. 3.2.2. $a = 1, b = 2, c = 3, d = 4, e = 5$. $3 < 4 < 5 = 5 < 6 = 6 < 7 = 7 < 8 < 9$.

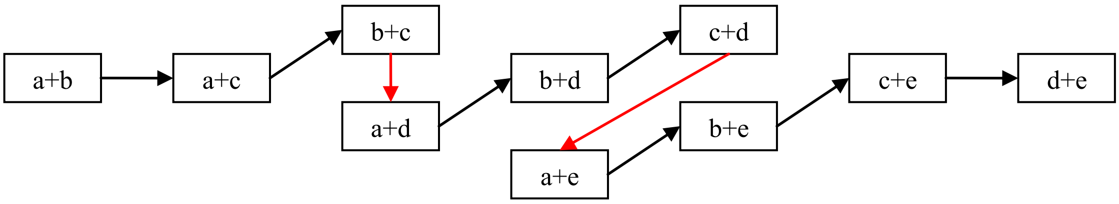

Рис. 3.2.3. $a = 1, b = 2, c = 3, d = 4, e = 6$. $3 < 4 < 5 = 5 < 6 < 7 = 7 < 8 < 9 < 10$.

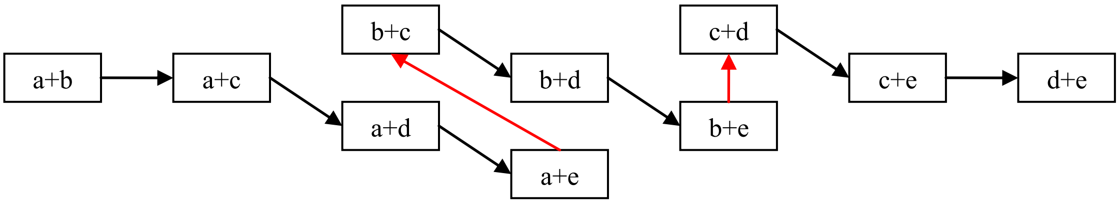

Рис. 3.3.1. $a = 0, b = 2, c = 3, d = 4, e = 5$. $2 < 3 < 4 < 5 = 5 < 6 < 7 = 7 < 8 < 9$.

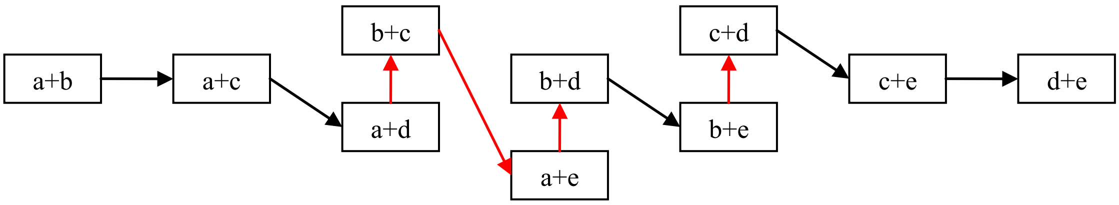

Рис. 3.3.2. $a = 1, b = 2, c = 3, d = 4, e = 5$. $3 < 4 < 5 = 5 < 6 = 6 < 7 = 7 < 8 < 9$.

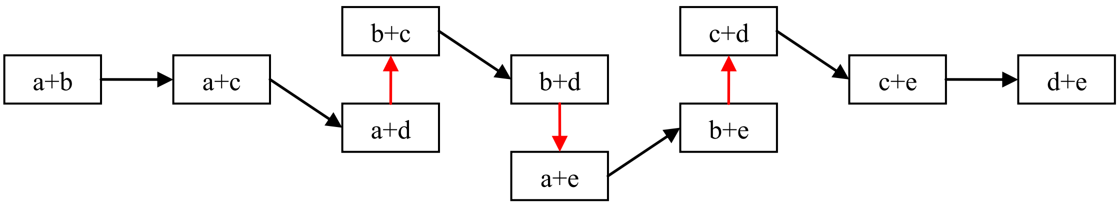

Рис. 3.3.3. $a = 1, b = 2, c = 3, d = 4, e = 5$. $3 < 4 < 5 = 5 < 6 = 6 < 7 = 7 < 8 < 9$.

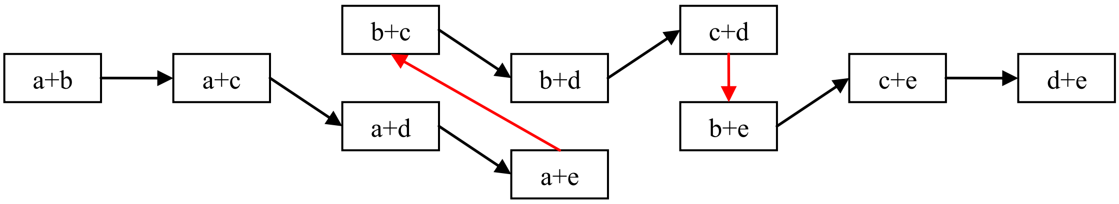

Рис. 3.4.1. a = 0, b = 2, c = 3, d = 4, e = 5. 2 < 3 < 4 < 5 = 5 < 6 < 7 = 7 < 8 < 9.

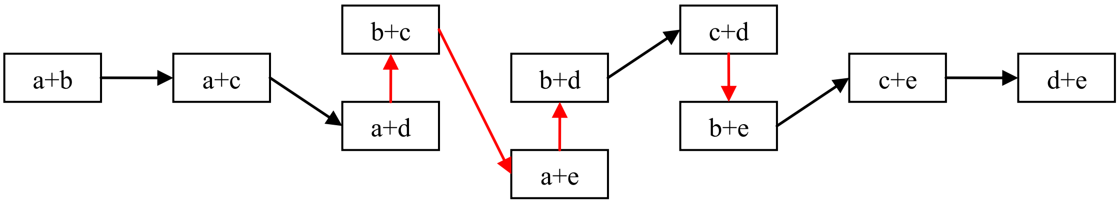

Рис. 3.4.2. a = 1, b = 2, c = 3, d = 4, e = 5. 3 < 4 < 5 = 5 < 6 = 6 < 7 = 7 < 8 < 9.

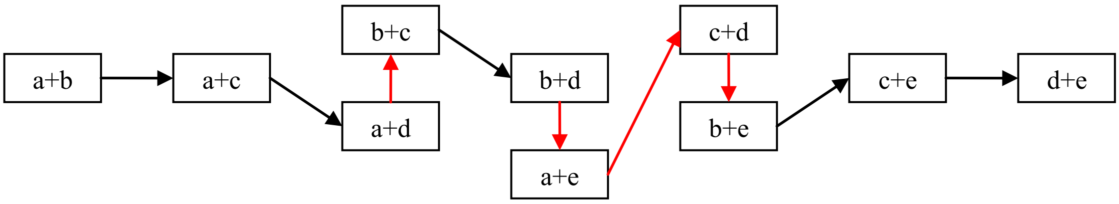

Рис. 3.4.3. a = 1, b = 2, c = 3, d = 4, e = 5. 3 < 4 < 5 = 5 < 6 = 6 < 7 = 7 < 8 < 9.

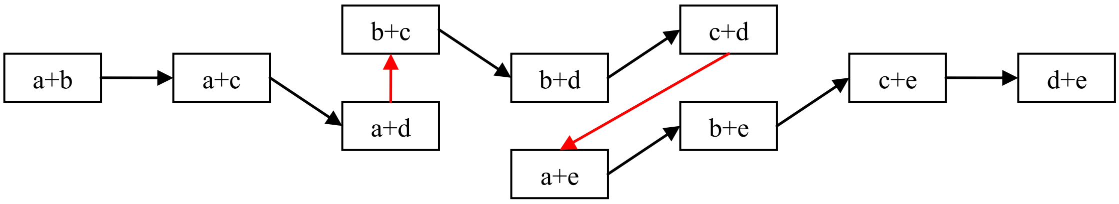

Рис. 3.4.4. a = 1, b = 2, c = 3, d = 4, e = 6. 3 < 4 < 5 = 5 < 6 < 7 = 7 < 8 < 9 < 10.

Ответ. Всего возможны 12 вариантов расположения попарных сумм в порядке неубывания, и все 12 реализуемы:

1. a+b, a+c, b+c, a+d, a+e, b+d, b+e, c+d, c+e, d+e;
2. a+b, a+c, b+c, a+d, b+d, a+e, b+e, c+d, c+e, d+e;
3. a+b, a+c, b+c, a+d, a+e, b+d, c+d, b+e, c+e, d+e;
4. a+b, a+c, b+c, a+d, b+d, a+e, c+d, b+e, c+e, d+e;
5. a+b, a+c, b+c, a+d, b+d, c+d, a+e, b+e, c+e, d+e;
6. a+b, a+c, a+d, a+e, b+c, b+d, b+e, c+d, c+e, d+e;
7. a+b, a+c, a+d, b+c, a+e, b+d, b+e, c+d, c+e, d+e;
8. a+b, a+c, a+d, b+c, b+d, a+e, b+e, c+d, c+e, d+e;
9. a+b, a+c, a+d, a+e, b+c, b+d, c+d, b+e, c+e, d+e;
10. a+b, a+c, a+d, b+c, a+e, b+d, c+d, b+e, c+e, d+e;
11. a+b, a+c, a+d, b+c, b+d, a+e, c+d, b+e, c+e, d+e;
12. a+b, a+c, a+d, b+c, b+d, c+d, a+e, b+e, c+e, d+e.

Обобщение. Можно только гадать, что подразумевал ведущий под «очевидным неочевидным» обобщением.

1. Увеличить количество переменных. Очевидно, но вряд ли интересно, - вариантов уже и для 5 переменных многовато.
2. Рассмотреть не строгие неравенства, а нестрогие: $a \le b \le c \le d \le e$. Не интересно. Так как возможен случай, когда все числа равны, то реализуемы все 10! вариантов расположения попарных сумм.
3. Рассмотреть суммы чисел не только друг с другом, но и самих с собой, то есть включить в граф частичного порядка вершины 2a, 2b, 2c, 2d и 2e. Вариантов, подлежащих рассмотрению, оказалось неожиданно много (286). Правда, не все из них реализуемы, но всё равно, вряд ли, такое объёмное обобщение интересно.
4. Суммировать не по 2, а по 3. Решение абсолютно то же. Выбрать в сумму три переменные – то же самое, что не выбрать две.
5. Рассмотреть суммы всех 2^5 возможных наборов чисел (включая пустой набор). Тоже слишком объёмно.
6. Заменить сложение другой коммутативной операцией – умножением. На первый взгляд, ничего не изменится – достаточно перейти от чисел к их логарифмам. Но это рассуждение верно только для положительных чисел.

Изменение знаков всех чисел не меняет величин попарных произведений, но инвертирует порядок чисел. В результате «a» меняется с «e», а «b» - с «d». Поэтому достаточно рассмотреть только следующие случаи.

1. $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0, e > 0$.
2. $a = 0, b > 0, c > 0, d > 0, e > 0$.
3. $a < 0, b > 0, c > 0, d > 0, e > 0$.
4. $a < 0, b = 0, c > 0, d > 0, e > 0$.
5. $a < 0, b < 0, c > 0, d > 0, e > 0$.
6. $a < 0, b < 0, c = 0, d > 0, e > 0$.

Случай 1 ($a > 0, b > 0, c > 0, d > 0, e > 0$) рассмотрен в основной ветке.
Случай 2. $a = 0, b > 0, c > 0, d > 0, e > 0$ (рис. 4).

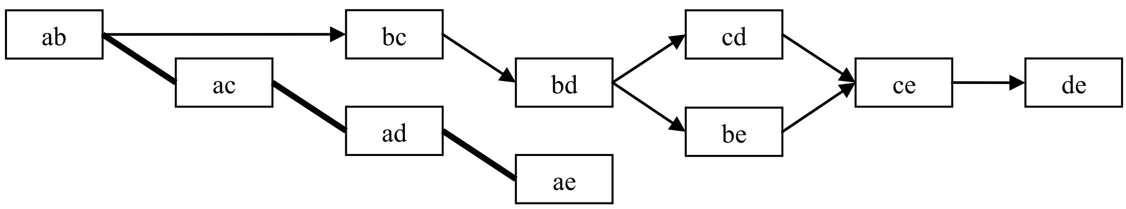

Рис. 4. $a = 0, b > 0, c > 0, d > 0, e > 0$. 48 – 2 = 46 новых вариантов.

Так как ab = ac = ad = ae = 0, то они могут следовать в произвольном порядке. Также, возможны 2 варианта относительного расположения вершин cd и be. Всего получается 4!*2 = 48 вариантов, из них 2 (ab, ac, ad, ae, bc, bd, be, cd, ce, de и ab, ac, ad, ae, bc, bd, cd, be, ce, de) встречаются также и в случае 1.

a = 0, b = 1, c = 2, d = 4, e = 8. (ae = ad = ac = ab) < bc < bd < (be = cd) < ce < de.
a = 0, b = 1, c = 2, d = 4, e = 8. (0 = 0 = 0 = 0) < 2 < 4 < (8 = 8) < 16 < 32.

Случай 3. a < 0, b > 0, c > 0, d > 0, e > 0 (рис. 5).

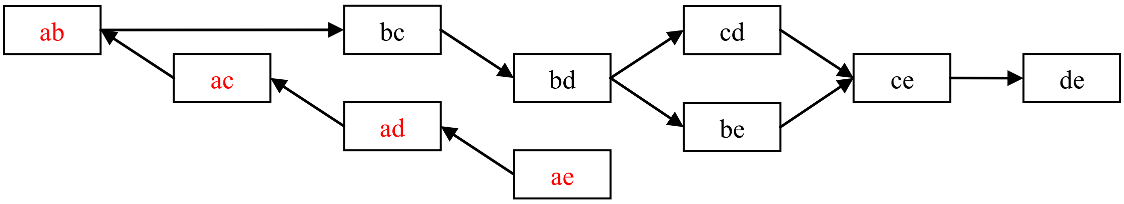

Рис. 5. a < 0, b > 0, c > 0, d > 0, e > 0. 2 – 2 = 0 новых вариантов.

Возможны два варианта расположения вершин cd и be, и оба встречаются также и в случае 2.

Случай 4. a < 0, b = 0, c > 0, d > 0, e > 0 (рис. 6).

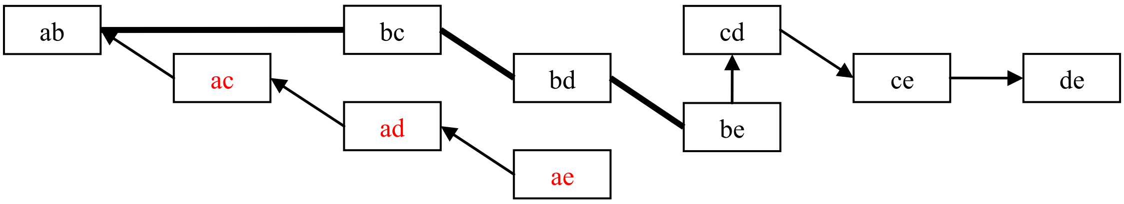

Рис. 6. a < 0, b = 0, c > 0, d > 0, e > 0. 24 – 1 = 23 новых варианта.

Так как ab = bc = bd = be = 0, то они могут следовать в произвольном порядке. Всего получается 4! = 24 варианта, но один из них (ae, ad, ac, ab, bc, bd, be, cd, ce, de) встречается также и в случае 2.

a = -1, b = 0, c = 1, d = 2, e = 4. ae < ad < ac < (ab = bc = bd = be) < cd < ce < de.
a = -1, b = 0, c = 1, d = 2, e = 4. -4 < -2 < -1 < (0 = 0 = 0 = 0) < 2 < 4 < 8.

Случай 5. a < 0, b < 0, c > 0, d > 0, e > 0 (рис. 7).

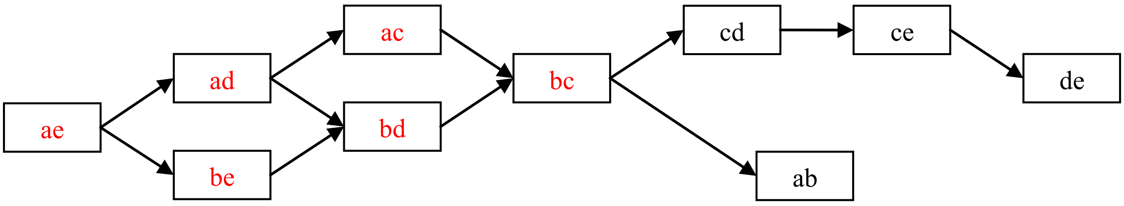

Рис. 7. a < 0, b < 0, c > 0, d > 0, e > 0. 20 – 1 = 19 новых вариантов.

Этот случай посложнее. Положительны только произведения ab, cd, ce и de, остальные - отрицательны. Вершины ac и be можно вставить пятью способами, а вершину ab – четырьмя, причём независимо от вставки ac и be. Всего получается 5*4 = 20 вариантов, но один из них (ae, ad, ac, be, bd, bc, ab, cd, ce, de) встречается также и в случае 4.

a = -2, b = -1, c = 1, d = 2, e = 4. ae < (ad = be) < (bd = ac) < bc < (ab = cd) < ce < de.
a = -2, b = -1, c = 1, d = 2, e = 4. -8 < (-4 = -4) < (-2 = -2) < -1 < (2 = 2) < 4 < 8.

a = -4, b = -2, c = 1, d = 2, e = 4. ae < (ad = be) < (bd = ac) < bc < cd < ce < (ab = de).
a = -4, b = -2, c = 1, d = 2, e = 4. -16 < (-8 = -8) < (-4 = -4) < -2 < 2 < 4 < (16 = 16).

a = -8, b = -1, c = 1, d = 2, e = 4. ae < ad < ac < be < bd < bc < cd < ce < (ab = de).
a = -8, b = -1, c = 1, d = 2, e = 4. -32 < -16 < -8 < -4 < -2 < -1 < 2 < 4 < (8 = 8).

a = -8, b = -1, c = 2, d = 4, e = 8. ae < ad < ac < be < bd < bc < (ab = cd) < ce < de.
a = -8, b = -1, c = 2, d = 4, e = 8. -64 < -32 < -16 < -8 < -4 < -2 < (8 = 8) < 16 < 32.

Случай 6. a < 0, b < 0, c = 0, d > 0, e > 0 (рис. 9).

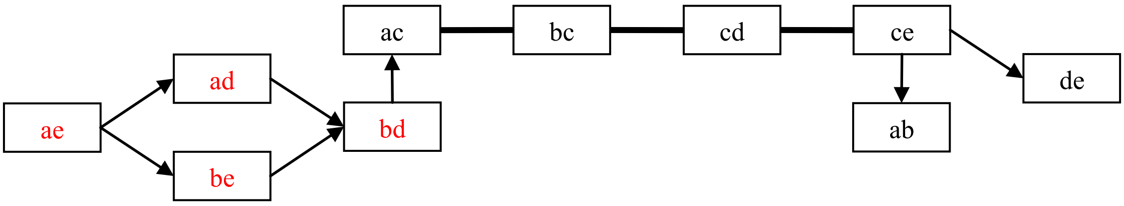

Рис. 9. a < 0, b < 0, c = 0, d > 0, e > 0. 96 – 4 = 92 новых варианта.

Если положить a = -e, b = -d, то ad = be, ab = de, так что возможны оба варианта взаимного расположения вершин ad и be и оба варианта взаимного расположения вершин ab и de. Вместе с 4! вариантами взаимного расположения вершин ac, bc cd и ce получается 2*2*4! = 96 вариантов, но 4 из них (ae < (ad = be) < bd < ac < bc < cd < ce < (ab = de)) встречаются также и в случае 5.

a = -2, b = -1, c = 0, d = 1, e = 2. ae < (ad = be) < bd < (ac = bc = cd = ce) < (ab = de).
a = -2, b = -1, c = 0, d = 1, e = 2. -4 < (-2 = -2) < -1 < (0 = 0 = 0 = 0) < (2 = 2).

№	a	b	c	d	e	соотношения между произведениями	вариантов
1	1	2	4	8	16	ab < ac < (ad = bc) < (ae = bd) < (be = cd) < ce < de	8
2	1	2	4	8	32	ab < ac < (ad = bc) < bd < (ae = cd) < be < ce < de	4 – 2 = 2
3	1	4	8	16	32	ab < ac < ad < (ae = bc) < bd < (be = cd) < ce < de	4 – 2 = 2
4	0	1	2	4	8	(ab = ac = ad = ae) < bc < bd < (be = cd) < ce < de	48 – 2 = 46
5	-1	1	2	4	8	ae < ad < ac < ab < bc < bd < (be = cd) < ce < de	2 – 2 = 0
6	-1	0	1	2	4	ae < ad < ac < (ab = bc = bd = be) < cd < ce < de	24 – 1 = 23
7	-2	-1	1	2	4	ae < (ad = be) < (bd = ac) < bc < (ab = cd) < ce < de	8
8	-4	-2	1	2	4	ae < (ad = be) < (bd = ac) < bc < cd < ce < (ab = de)	8
9	-8	-1	1	2	4	ae < ad < ac < be < bd < bc < cd < ce < (ab = de)	2
10	-8	-1	2	4	8	ae < ad < ac < be < bd < bc < (ab = cd) < ce < de	2 – 1 = 1
11	-2	-1	0	1	2	ae < (ad = be) < bd < (ac = bc = cd = ce) < (ab = de)	96 – 4 = 92
						Итого	192

В первых 10 строчках таблицы ac < ce. Если инвертировать знаки чисел, то ac превращается в ce, и наоборот. Теперь ce < ac, поэтому получившиеся варианты не совпадают с исходными. Случай из строки 11 самосимметричен.

Итого: (12 + 46 + 23 + 19)*2 + 92 = 292 варианта взаимного расположения попарных произведений. Действительно, очевидное, вроде бы, обобщение привело к весьма неочевидному результату.