О. Б. Полубасов   02.11.2013 г.

========= ММ184 ==========

Как же без графов?

ММ184 (7 баллов)

Решения принимаются, по крайней мере, до 07.11.13

Компания из 30 отдыхающих собралась для 10-дневного рафтинга. Некоторые из туристов были знакомы между собой. График дежурств (по три человека на каждый день, чтобы каждый отдежурил ровно один раз) составили с помощью жребия. Получилось, что в каждой тройке дежурных ровно двое знакомы между собой. Недовольный такой ситуацией командор предложил свой график, такой что в каждой тройке была ровно одна пара незнакомых. Этот график тоже не всем понравился. Покумекав, туристы смогли совместными усилиями составить такой график, что в каждой тройке дежурных все были знакомы между собой.

Какое наименьшее и наибольшее число пар знакомых могло быть в данной группе?
========================

Перепишем условие в теоретико-графовых обозначениях, слегка обобщив.

Рассмотрим граф G на 3n вершинах, $n \geq 2$.

Условие 1: Можно разбить граф на тройки вершин, так что в каждой тройке будет ровно одна пара смежных вершин. Назовём такие тройки 1-тройками.

Условие 2: Можно разбить граф на тройки вершин, так что в каждой тройке будет ровно две пары смежных вершин. Назовём такие тройки 2-тройками.

Условие 3: Можно разбить граф на тройки вершин, так что в каждой тройке будет ровно три пары смежных вершин. Назовём такие тройки 3-тройками.

Вопрос: какое наименьшее и наибольшее число рёбер может быть в графе G?

Условие существования разбиения графа на 0-тройки отсутствует. Предположительно, это вызвано желанием внести в задачу асимметрию.

Сначала рассмотрим наименьшее число рёбер.

Из условия 3 следует, что рёбер не меньше 3n. Чтобы выполнить условие 2, добавив минимальное число рёбер, нужно в каждую из 2-троек включить две вершины из одной 3-тройки, а третью вершину – из другой, соединив её ребром с одной из первых двух вершин. Тогда достаточно добавить n рёбер, а всего получается 4n рёбер.

При $n \leq 3$ все графы с минимальным числом рёбер изоморфны, а уже при $n = 4$ можно построить два минимальных графа: связный и не связный. Число неизоморфных минимальных графов равно количеству разбиений n неразличимых предметов на неразличимые кучки, содержащие не менее чем по два предмета. Для n = 10 получается 12 неизоморфных графов.

Пример графа с минимальным числом рёбер приведён на рис. 1.

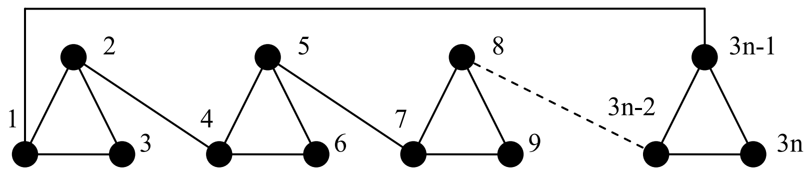

Рис. 1. Граф с минимальным числом рёбер.

Проверим выполнение условий.
3-тройки: {1, 2, 3}, {4, 5, 6}, {7, 8, 9},.., {3n-2, 3n-1, 3n}.
2-тройки: {2, 3, 4}, {5, 6, 7}, {8, 9, 10},.., {3n-1, 3n, 1}.
1-тройки: {3, 4, 5}, {6, 7, 8}, {9, 10, 11},.., {3n, 1, 2}.

Теперь рассмотрим наибольшее число рёбер.

Из условия 1 следует, что в графе существует хотя бы 2n пар несмежных вершин, то есть число рёбер не превышает C(3n, 2) – 2n. Пример дополнения графа с максимальным числом рёбер числом рёбер приведён на рис. 2. Легко видеть, что существует всего один максимальный граф, с точностью до изоморфизма.

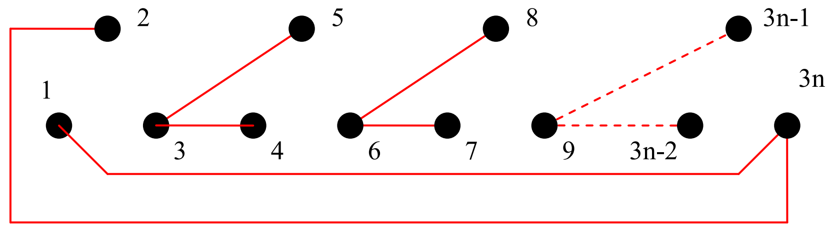

Рис. 2. Дополнение графа с максимальным числом рёбер.

Объединим рисунки 1 и 2 (рис. 3). В графе G должны присутствовать рёбра, показанные на рис. 3 чёрным цветом, и отсутствовать – показанные красным. Остальные рёбра не входят ни в одну из выбранных троек, поэтому могут как присутствовать, так и отсутствовать.

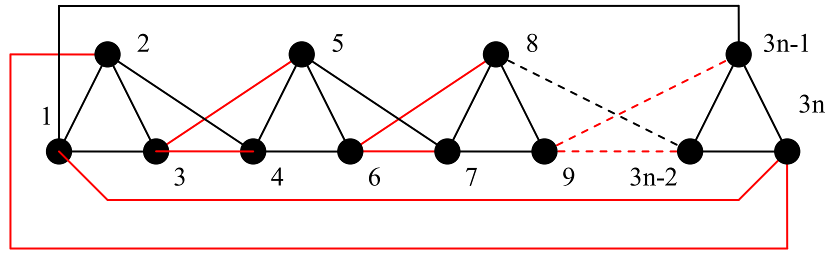

Рис. 3. Объединение рисунков 1 и 2.

Таким образом, граф G может содержать произвольное количество рёбер в диапазоне от 4n до C(3n, 2) – 2n. Для n = 10 это даёт от 40 до 15*29 – 20 = 415 рёбер.

Ответ. В группе могло быть любое количество от 40 до 415 знакомых пар.

Обобщение.

На самом деле, выше доказано более сильное утверждение, чем требуется условиями задачи, а именно: «Можно составить схему обязательно присутствующих и обязательно отсутствующих рёбер, а также графики дежурств так, что для любого $n \geq 2$ и для любого числа рёбер от 4n до C(3n, 2) – 2n найдётся граф с требуемым числом рёбер, удовлетворяющий как схеме, так и условию задачи».

Для обобщений задачи такое сильное утверждение может уже не выполняться. Не всегда можно построить универсальную схему графа и графики дежурств, подходящие для любого $n \geq 2$ и для любого требуемого числа рёбер в допустимом диапазоне. Например, рассмотрим граф G на 4n вершинах, $n \geq 2$.

Условие 1: Можно разбить граф на четвёрки вершин, так что в каждой четвёрке будет ровно две пары смежных вершин. Назовём такие четвёрки 2-четвёрками.

Условие 2: Можно разбить граф на четвёрки вершин, так что в каждой четвёрке будет ровно три пары смежных вершин. Назовём такие четвёрки 3-четвёрками.

Условие 3: Можно разбить граф на четвёрки вершин, так что в каждой четвёрке будет ровно 4 пары смежных вершин. Назовём такие четвёрки 4-четвёрками.

Условие 4: Можно разбить граф на четвёрки вершин, так что в каждой четвёрке будет ровно 5 пар смежных вершин. Назовём такие четвёрки 5-четвёрками.

Условие 5: Можно разбить граф на четвёрки вершин, так что в каждой четвёрке будет ровно 6 пар смежных вершин. Назовём такие четвёрки 6- четвёрками.

Вопрос: какое наименьшее и наибольшее число рёбер может быть в графе G?

Условия существования разбиения графа на 0- и 1-четвёрки намеренно отсутствуют.

Из условия 5 следует, что рёбер не меньше 6n. Чтобы выполнить условие 4, добавив минимальное число рёбер, нужно в каждую из 5-четвёрок включить три вершины из одной 6-четвёрки, а четвёртую вершину – из другой, соединив её ребром с двумя из первых трёх вершин. Тогда достаточно добавить 2n рёбер, а всего получается не меньше чем 8n рёбер.

Из условия 1 следует, что в графе существует хотя бы 4n пар несмежных вершин, то есть число рёбер не превышает C(4n, 2) – 4n.

Схема смежности вершин графа, обеспечивающая любое число рёбер от 8n до C(4n, 2) – 5n ($n \geq 3$), приведена на рис. 4.

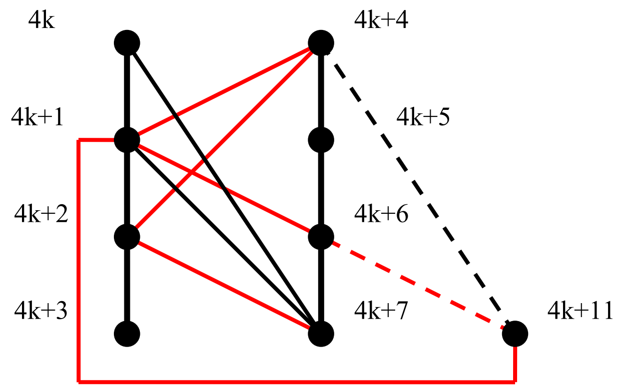

Рис. 4. Схема смежности вершин графа, обеспечивающая любое число рёбер от 8n до C(4n, 2) – 5n.

Вершины нумеруются от 0 до 4n – 1, k изменяется от 0 до n-1, номера вершин вычисляются по модулю 4n. 6-четвёрки обозначены жирными вертикальными линиями, черные рёбра обязательно входят в граф G, красные – обязательно не входят.

Графики дежурств.
2-четвёрки: {4k+1, 4k+4, 4k+6, 4k+11}.
3-четвёрки: {4k+1, 4k+2, 4k+4, 4k+7}.
4-четвёрки: {4k+1, 4k+4, 4k+6, 4k+7}.
5-четвёрки: {4k, 4k+1, 4k+2, 4k+7}.
6-четвёрки: {4k, 4k+1, 4k+2, 4k+3}.

Если в графе требуется сделать много рёбер, то следует использовать другую схему смежности вершин графа. Схема, обеспечивающая любое число рёбер от 10n до C(4n, 2) – 4n ($n \geq 3$), приведена на рис. 5.

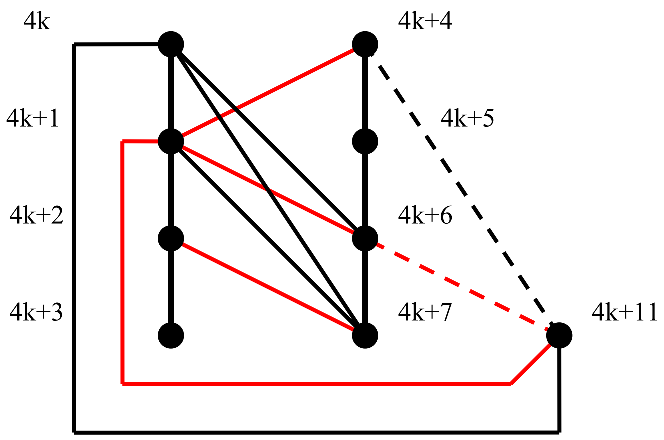

Рис. 5. Схема смежности вершин графа, обеспечивающая любое число рёбер от 10n до C(4n, 2) – 4n.

Графики дежурств.
2-четвёрки: {4k+1, 4k+4, 4k+6, 4k+11}.
3-четвёрки: {4k, 4k+1, 4k+6, 4k+11}.
4-четвёрки: {4k+1, 4k+4, 4k+6, 4k+7}.
5-четвёрки: {4k, 4k+1, 4k+2, 4k+7}.
6-четвёрки: {4k, 4k+1, 4k+2, 4k+3}.

Для n=2 тоже существует (единственная, с точностью до изоморфизма) схема смежности вершин графа, обеспечивающая любое число рёбер от 8n = 16 до C(4n, 2) – 5n = 18. Схема приведена на рис. 6.

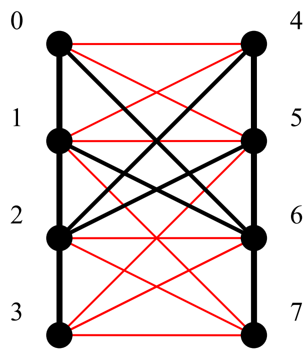

Рис. 6. Схема смежности вершин графа, обеспечивающая любое число рёбер от 8n до C(4n, 2) – 5n для n = 2.

Графики дежурств.
2-четвёрки: {0, 1, 4, 5}, {6, 7, 2, 3}.
3-четвёрки: {0, 3, 5, 6}, {4, 7, 1, 2}.
4-четвёрки: {0, 2, 3, 5}, {4, 6, 7, 1}.
5-четвёрки: {0, 1, 3, 6}, {4, 5, 7, 2}.
6-четвёрки: {0, 1, 2, 3}, {4, 5, 6, 7}.