О. Б. Полубасов   07.11.2013 г.

========= ММ185 ==========

Очередной раз режем квадрат

ММ185 (5 баллов)

Решения принимаются, по крайней мере, до 14.11.13

Квадрат со стороной 1 разрезали на 100 прямоугольников с суммой периметров P. Найти диапазон возможных значений P.

=======================

Сразу обобщим задачу: пусть прямоугольник со сторонами a и b ($a \ge b$, длинная сторона расположена горизонтально) разрезали на $n \ge 1$ прямоугольников.

Тогда результирующие прямоугольники в совокупности содержат 4n углов.

Так как величина каждого угла равна 90˚, то в каждой точке плоскости, исключая угловые точки исходного прямоугольника, могут сойтись 0, 2 или 4 угла. Назовём точки смыкания углов соответственно Т-точками (тройниками) и Х-точками (перекрёстками).

Определим понятие «разрез». Будем считать, что разрезы прямолинейные (горизонтальные или вертикальные), непрерывные, начинаются и заканчиваются в Т-точках, а в Х-точках просто пересекаются. Легко видеть, что так определённое множество разрезов однократно покрывает все линии разреза (любую линию разреза можно разбить на прямолинейные участки, а участки однозначно объединяются в разрезы).

Тогда каждой Т-точке соответствуют два угла, а каждому углу, кроме 4 углов исходного прямоугольника, – не более одной Т-точки. Следовательно, число Т-точек не превышает $(4n-4)/2 = 2n-2$.

Каждому разрезу соответствуют две Т-точки, а каждая Т-точка – одному разрезу. Следовательно, число разрезов вдвое меньше числа Т-точек, а значит, не превышает $(2n-2)/2 = n-1$.

Так как длина каждого разреза не превышает a, то их суммарная длина не превышает $(n-1)a$. Искомая сумма периметров P равна сумме периметра исходного прямоугольника и удвоенной длины разрезов, поэтому $P \le 2na + 2b$.

Очевидно, что значение $P = 2na + 2b$ достигается, только если все разрезы имеют длину a (то есть, расположены горизонтально, если $a \ne b$). Если же хотя бы один из горизонтальных разрезов имеет длину меньше чем a, то он заканчивается на вертикальном разрезе. Длина вертикального разреза не превышает b, поэтому $P < (2n - 2)a + 4b$. Следовательно, в случае $a \ne b$ область значений P имеет разрыв размером $2(a - b)$.

При $n = 1$: $P = 2a + 2b$.

При $n = 2$: $P = 2a + 4b$ (один вертикальный разрез) или $P = 4a + 2b$ (один горизонтальный разрез).

Пусть $n \geq 3$. Найдётся непрерывная линия разреза, проходящая от верхней стороны квадрата до нижней или от левой до правой. Если линия разреза одна и прямолинейная, то она разбивает квадрат на 2 прямоугольника. Иначе (линия разреза не прямолинейна или есть другие линии), суммарная длина разрезов строго больше b. Таким образом, при $n \geq 3$: $P > 2a + 4b$.

Возможные значения P найдены, осталось доказать их реализуемость. Отрежем от исходного прямоугольника вертикальную полоску шириной $x > 0$, которую затем разрежем поперёк на n-1 прямоугольников. Всего получится $n \geq 3$ прямоугольников (рис. 1).

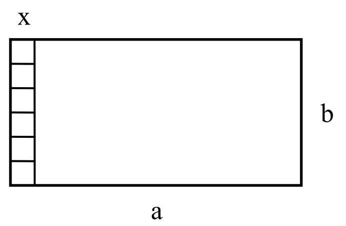

Рис. 1. $2a + 4b < P < (2n – 2)a + 4b$.

Сумма периметров $P = 2a + 4b + 2(n-2)x$. Варьируя x в пределах $0 < x < a$, получаем любое значение P в диапазоне $2a + 4b < P < (2n – 2)a + 4b$.

Итак.

При $n = 1$: $P = 2a + 2b$.

При $n = 2$: $(P = 2a + 4b) \cup (P = 4a + 2b)$.

При $n \geq 3$. $(2a + 4b < P < (2n – 2)a + 4b) \cup (P = 2na + 2b)$.

Для $a = b = 1$, $n = 100$ получается: $6 < P \leq 202$.

Ответ. $6 < P \leq 202$.

Замечание. Если принять другое определение разреза, а именно, считать, что в X-точке горизонтальный разрез продолжается, а два вертикальных разреза заканчиваются, то каждому разрезу, по-прежнему, соответствуют 4 угла, но теперь эти углы однократно покрывают всё множество углов, кроме углов исходного прямоугольника. Поэтому количество разрезов равно n-1.

Это соотношение может оказаться полезнее предыдущего при доказательстве каких-нибудь других свойств разрезания.