О. Б. Полубасов 10.11.2013 г.

========= ММ186 ==========

Еще в школе, решая задачи типа "Из пунктов А и В навстречу друг другу...", грезил предлагаемой задачей. И вот...

ММ186 (7 баллов)

Решения принимаются, по крайней мере, до 21.11.13

В 12:00 расстояние от маяка до сухогруза "Альфа" составляло 12 км, а до буксира "Омега" - $4\sqrt{13}$.

В 13:00 расстояния от маяка до "Альфы" и "Омеги" оказались такими же как 12:00. А в 14:00 расстояния от маяка до "Альфы" и "Омеги" оказались равны по $12\sqrt{5}$

Найти минимальное расстояние от "Альфы" до "Омеги", учитывая, что в 13:45 смотритель маяка не видел "Омегу" за "Альфой".

Примечание: Сухогруз и буксир движутся прямолинейно и равномерно. Все плавсредства и маяк - материальные точки.

========================

Выберем систему отсчёта.

За ноль времени ($t = 0$) примем 13:45, единицу измерения времени положим равной 15 минутам, расстояния будем измерять в километрах, а скорости – в километрах за 15 минут.

Начало координат совместим с маяком, а ось ординат – с направлением от маяка на оба судна при $t = 0$. Тогда $A.x = B.x = 0$, $0 < A.y < B.y$, где A и B – координаты соответственно «Альфы» и «Омеги» при $t = 0$.

Пусть скорость (векторная) «Альфа» равна Va, а «Омеги» – Vb. Тогда положение «Альфы» в момент времени t равно $A + tVa$, а «Омеги» – $B + tVb$.

Квадрат расстояния между «Альфой» и «Омегой» в момент времени t равен $S^2(t) = (A + tVa – B – tVb)^2$.

Чтобы найти точки экстремума, приравняем производную нулю:

$$d(S^2)/dt = 2(A + tVa – B – tVb)(Va – Vb) = 2(A – B)(Va –Vb) + 2t(Va – Vb)^2 = 0.$$

Следовательно, либо $Va = Vb$ (и тогда расстояние между суднами постоянно), либо

$$t = (B – A)(Va – Vb) / (Va – Vb)^2.$$

Обозначим: $C = B – A$, $Vc = Vb – Va$, тогда

$$t = -CVc / Vc^2,$$
$$S^2(t) = (C + tVc)^2.$$

Из условий задачи можно вывести 6 квадратных уравнений.

1. $(A - 7Va)^2 = 12^2 = 144$.
2. $(A - 3Va)^2 = 144$.
3. $(A + Va)^2 = 12^2*5 = 720$.
4. $(B - 7Vb)^2 = 4^2*13 = 208$.
5. $(B - 3Vb)^2 = 208$.
6. $(B + Vb)^2 = 12^2*5 = 720$.

Раскрыв скобки в трёх первых уравнениях, получим систему из 3 линейных уравнений от 3 переменных.

1. $A^2 - 14AVa + 49Va^2 = 144$.
2. $A^2 - 6AVa + 9Va^2 = 144$.
3. $A^2 + 2AVa + Va^2 = 720$.

Откуда: $A^2 = 522$, $AVa = 90$, $Va^2 = 18$.

Так как $A.x = 0$, $A.y > 0$, то $A.y = 3\sqrt{58}$.

$AVa = A.y*Va.y = 3\sqrt{58}Va.y = 90 \Rightarrow Va.y = 15\sqrt{58} / 29$.

$Va.x^2 = Va^2 - Va.y^2 \Rightarrow Va.x = \pm 6\sqrt{58} / 29$. Так как решения симметричны относительно оси ординат, выберем положительный корень.

$A = (0, 3\sqrt{58}) \approx (0, 22.847)$,

$Va = (6\sqrt{58} / 29, 15\sqrt{58} / 29) \approx (1.5757, 3.9392)$.

Раскрыв скобки в трёх остальных уравнениях, получим систему из 3 линейных уравнений от 3 переменных.

1. $B^2 - 14BVb + 49Vb^2 = 208$.
2. $B^2 - 6BVb + 9Vb^2 = 208$.
3. $B^2 + 2BVb + Vb^2 = 720$.

Откуда: $B^2 = 544$, $BVb = 80$, $Vb^2 = 16$.

Так как $B.x = 0$, $B.y > 0$, то $B.y = 4\sqrt{34}$.

$BVb = B.y*Vb.y = 4\sqrt{34}Vb.y = 80 \Rightarrow Vb.y = 10\sqrt{34} / 17$.

$Vb.x^2 = Vb^2 - Vb.y^2 \Rightarrow Vb.x = \pm 6\sqrt{34} / 17$. Все симметрии уже использованы, поэтому необходимо проверить оба корня.

$B = (0, 4\sqrt{34}) \approx (0, 23.324)$.

$Vb1 = (6\sqrt{34} / 17, 10\sqrt{34} / 17) \approx (2.0580, 3.4300)$.

$Vb2 = (-6\sqrt{34} / 17, 10\sqrt{34} / 17) \approx (-2.0580, 3.4300)$.

	t	A	Ω	|A|	|Ω|	|A-Ω|
12:00	-7	(-11.032, -4.726)	(-14.408, -0.686)	12	14.422	5.265
12:30	-5	(-7.878, 3.151)	(-10.290, 6.174)	8.485	12	3.867
13:00	-3	(-4.728, 11.030)	(-6.174, 13.034)	12	14.422	2.471
13:45	0	(0, 22.847)	(0, 23.324)	22.847	23.324	0.476
13:52:24	0.493	(0.777, 24790)	(1.015, 25.016)	24.802	25.036	0.327
14:00	1	(1.576, 26.786)	(2.056, 26.754)	26.833	26.833	0.481

Таб 1. Положительный корень.

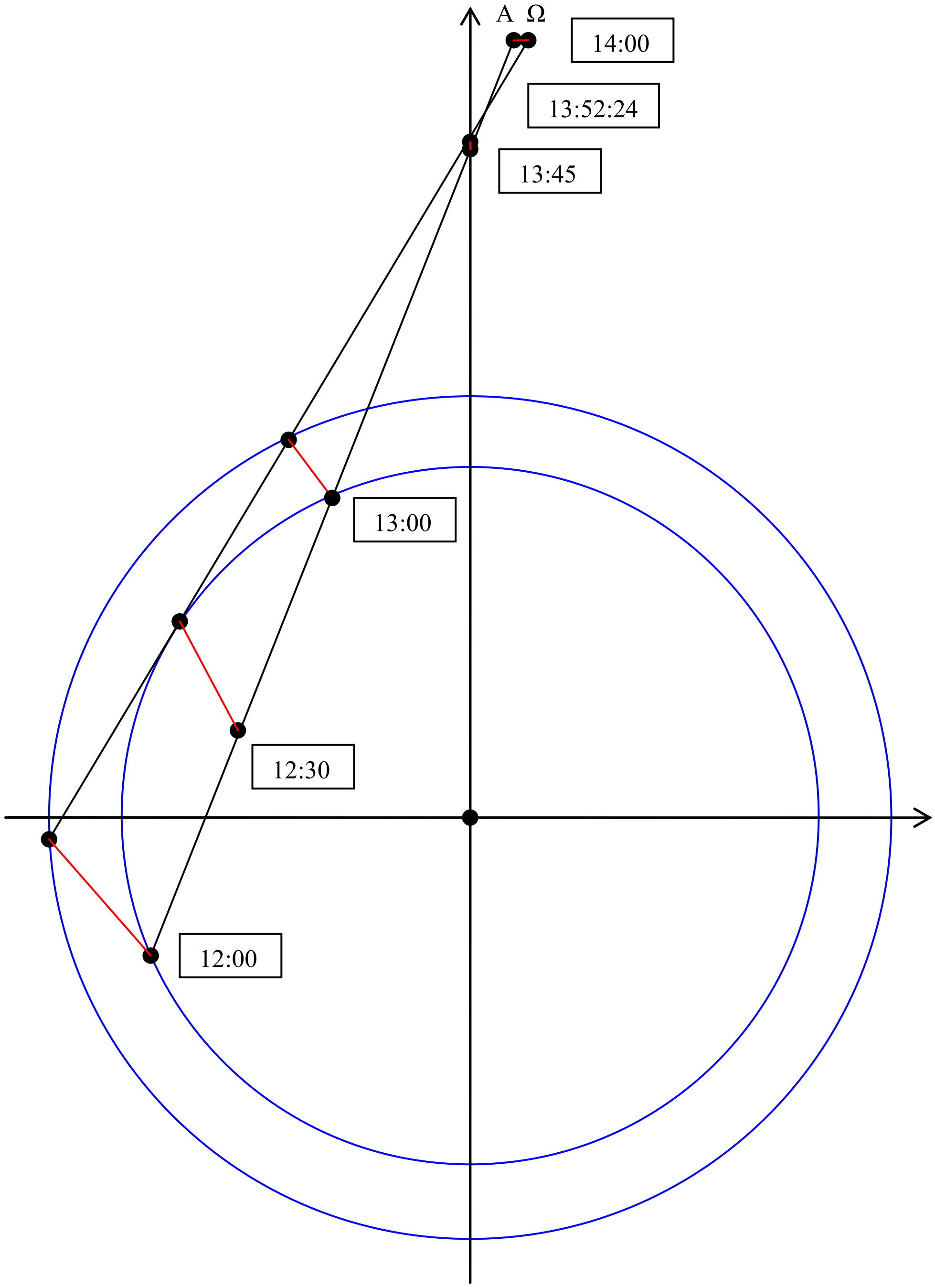

Рис 1. Положительный корень.

	t	A	Ω	|A|	|Ω|	|A-Ω|
12:00	-7	(-11.032, -4.726)	(14.408, -0.686)	12	14.422	25.759
12:30	-5	(-7.878, 3.151)	(10.290, 6.174)	8.485	12	18.418
13:00	-3	(-4.728, 11.030)	(6.174, 13.034)	12	14.422	11.085
13:44:44	-0.18	(-0.028, 22.776)	(0.037, 23.262)	22.776	23.262	0.471
13:45	0	(0, 22.847)	(0, 23.324)	22.847	23.324	0.476
14:00	1	(1.576, 26.786)	(-2.056, 26.754)	26.833	26.833	3.632

Таб 2. Отрицательный корень.

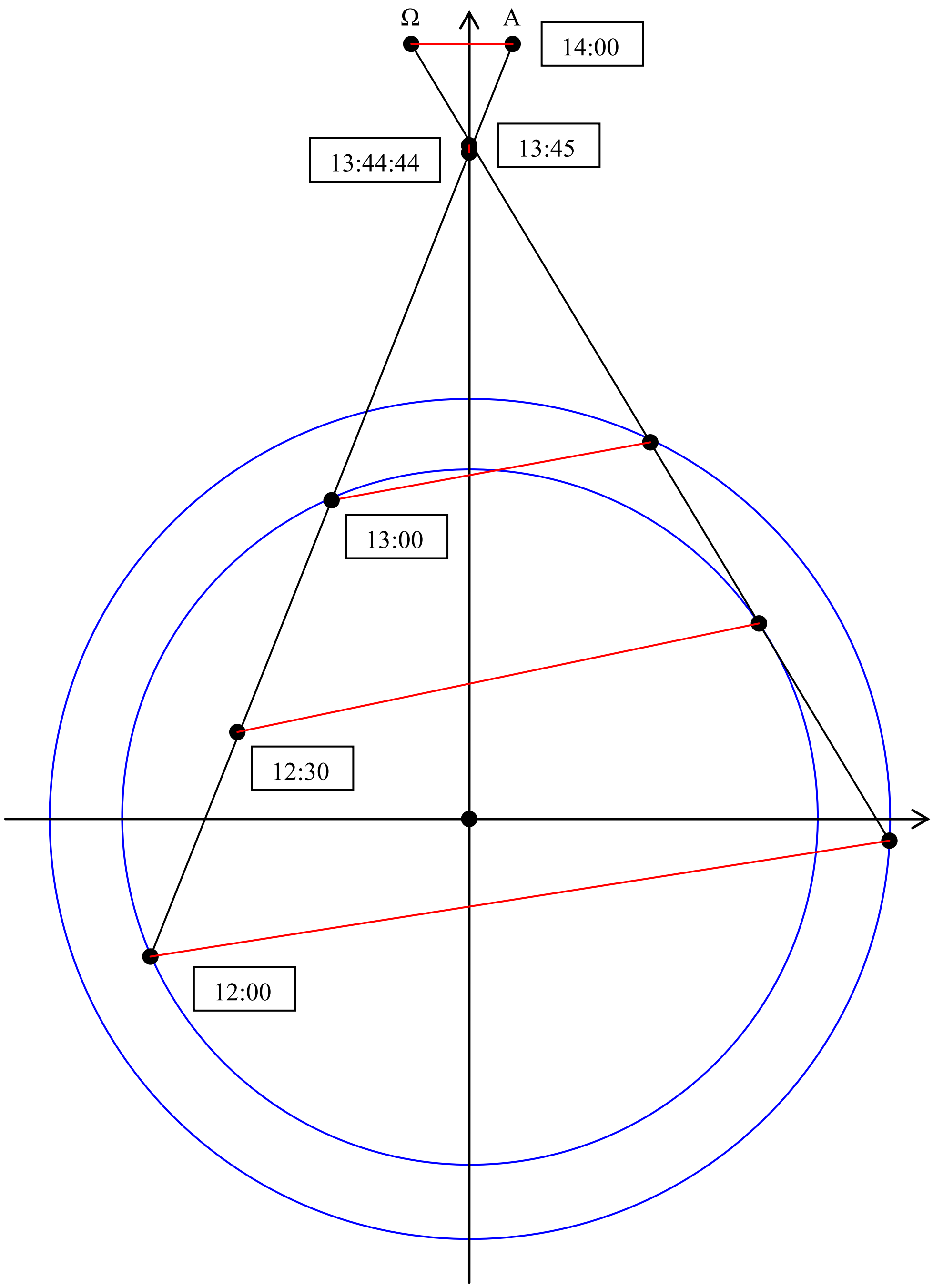

Рис 2. Отрицательный корень.

Положительный корень

$C = B – A = (0, 4\sqrt{34} – 3\sqrt{58}) \approx (0, 0.476)$.
$-Vc1 = Va – Vb1 = (174\sqrt{34} – 102\sqrt{58}, 290\sqrt{34} – 255\sqrt{58}) / 493$
$\approx (0.4823, -0.5092)$.
$Vc1^2 = (16762 – 744\sqrt{493}) / 493 \approx 0.4919$.
$-CVc1 = (3780\sqrt{493} – 83810) / 493 \approx 0.2426$.
$t1 = -CVc1 / Vc1^2 = (510\sqrt{493} – 9305) / 4093 \approx 0.4932$ (13:52:24).
$S1 = \sqrt{(C + t1Vc1)^2} \approx 0.327$.

Отрицательный корень

$-Vc2 = Va – Vb2 = (174\sqrt{34} + 102\sqrt{58}, 290\sqrt{34} – 255\sqrt{58}) / 493$
$\approx (3.6337, -0.5092)$.
$Vc2^2 = (16762 – 456\sqrt{493}) / 493 \approx 13.4628$.
$-CVc2 = (83810 – 3780\sqrt{493}) / 493 \approx -0.2426$.
$t2 = -CVc2 / Vc2^2 = (281465 – 12750\sqrt{493})/90493 \approx -0.0180$ (13:44:44).
$S2 = \sqrt{(C + t2Vc2)^2} \approx 0.471$.

Ответ. Возможны два ответа: 0.327 и 0.471 км.