О. Б. Полубасов   07.12.2013 г.

========= ММ189 ==========

Псевдогеометрия

ММ189 (6 баллов)

Решения принимаются, по крайней мере, до 12.12.13

Для каких натуральных m существует треугольник с целочисленными сторонами и медианой m?

Для каждого подходящего m найти наибольшую возможную сторону.

========================

Сумма квадратов сторон параллелограмма равна сумме квадратов диагоналей.

$d = 2m,$

$2a^2 + 2b^2 = c^2 + d^2 = c^2 + 4m^2.$ (1)

Следовательно, c чётно, а чётность a и b одинакова. Будем считать, что $a \le b$, и учтём условие треугольника, тогда:

$b - a \ge 0$

$c \ge 2,\ d \ge 2$

$a + b \ge c + 2$

$a + b \ge d + 2$

$a + c \ge b + 2$

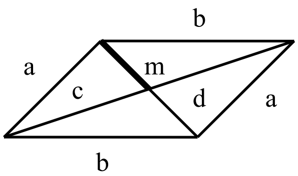

Рис. 1.

Теорема 1.

$m \ge 3.$

Доказательство.

$2a^2 + 2b^2 \equiv (a + b)^2 + (a - b)^2.$

$d^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2 \ge (c + 2)^2 - c^2 = 4c + 4 \ge 12, \Rightarrow d \ge 4.$

$c^2 = 2a^2 + 2b^2 - d^2 \ge (d + 2)^2 - d^2 = 4d + 4 \ge 20, \Rightarrow c \ge 6.$

$d^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2 \ge (c + 2)^2 - c^2 = 4c + 4 \ge 28, \Rightarrow d \ge 6,\ m \ge 3.$

Теорема 2.

Треугольник с целочисленными сторонами и медианой m существует для любых целых $m \ge 3$.

Доказательство.

Пусть $m = 2i - 1,\ i \ge 2$, положим $c = m^2 - 1,\ a = b = c/2 + 1,$ (2)

тогда $2a^2 + 2b^2 = (c^2 + 4c + 4)/2 = c^2 + 4(c + 1) = c^2 + 4m^2,$

то есть, (a, b, c) – целочисленный треугольник с медианой m.

Пусть $m = 2i,\ i \ge 2$, положим $c = m^2 - 2,\ a = c/2,\ b = a + 2,$ (3)

тогда $2a^2 + 2b^2 = c^2/2 + (c^2 + 8c + 16)/2 = c^2 + 4(c + 2) = c^2 + 4m^2,$

то есть, (a, b, c) – целочисленный треугольник с медианой m.

Заметим, что в обоих случаях: с – наибольшая сторона треугольника, $a + b = c + 2$, треугольник равнобедренный или почти равнобедренный.

Теорема 3.

Длина наибольшей стороны треугольника не превышает $m^2 – 1$.

Доказательство.

Наибольшей стороной может быть c или b.

Предположим, что $c \geq m^2$,
тогда $(a + b)^2 \leq (a + b)^2 + (a – b)^2 = c^2 + 4m^2 \leq c^2 + 4c < c^2 + 4c + 4 = (c + 2)^2$, $a + b < c + 2$. Противоречие с условием треугольника.

Следовательно, $c \leq m^2 – 1$, $m^2 \geq 3m$. По условию треугольника:
$b \leq c/2 + m – 1 \leq m^2/2 + m^2/3 – 3/2 = m^2 – m^2/6 – 3/2 \leq m^2 – 3$.

Ответ. Треугольник с целочисленными сторонами и медианой m существует для любых целых $m \geq 3$.

Наибольшая возможная сторона инцидентна медиане.

Для нечётных m её длина может достигать $m^2 – 1$, для чётных – $m^2 – 2$.

Итак, найдена точная оценка сверху длины наибольшей стороны.

Оценим сверху длину наименьшей стороны.

Наименьшей стороной может быть a или c.

Если m нечётно, то $4a^2 \leq 2a^2 + 2b^2 = c^2 + 4m^2 \leq m^4 – 2m^2 – 1 + 4m^2$
$= (m^2 + 1)^2 \Rightarrow a \leq (m^2 + 1)/2$.

Если m чётно, то $4a^2 \leq 2a^2 + 2b^2 = c^2 + 4m^2 \leq m^4 – 4m^2 – 4 + 4m^2 < m^4$,
$\Rightarrow a \leq m^2/2 – 1$.

В случаях, когда наименьшей стороной является c: $c < a \leq m^2/2 – 2$, то есть, оценка для длины c меньше.

В треугольниках вида (2) и (3) сторона a является наименьшей, и её длина равна вычисленной оценке, так что оценка точная. Треугольники существуют для каждого допустимого значения m.

Если m нечётно, то полупериметр $p = m^2$, площадь $S = \frac{m(m^2-1)}{2}$.

Если m чётно, то $p = m^2 – 1$,

$$S = \sqrt{(m^2-1)\frac{m^2}{2}\frac{(m^2-4)}{2}} = \frac{m}{2}\sqrt{(m^2-1)(m^2-4)}.$$

Оценим снизу длину наибольшей стороны.

Наибольшей стороной может быть c или b. Длина медианы меньше длины наибольшей из сторон треугольника, так что $m+1$ является нижней оценкой длины. Но насколько точна эта оценка?

Пусть наибольшая сторона – b. Обозначим: $e = b - m$.

$4m^2 - 2b^2 = 2m^2 - 4me - 2e^2 = 2(m - e)^2 - 4e^2$.

Из (1) следует: $2a^2 - 2(m - e)^2 = c^2 - 4e^2$,
то есть: $2(a + m - e)(a - m + e) = c^2 - 4e^2$.

Если $c^2 - 4e^2 > 0$, $a + m - e > 0$, то $a - m + e > 0$,
то есть: $m - e + 2 \leq a \leq b = m + e$, a и b – одной чётности.

Обозначим: $f = (a - m + e)/2$, $1 \leq f \leq e$,
тогда: $c^2 = 2a^2 + 2b^2 - 4m^2 = 4(2fm + f^2 + (e - f)^2)$. (4)

e\f	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2m + 1							
2	2m + 2	4m + 4						
3	2m + 5	4m + 5	6m + 9					
4	2m + 10	4m + 8	6m + 10	8m + 16				
5	2m + 17	4m + 13	6m + 13	8m + 17	10m + 25			
6	2m + 26	4m + 20	6m + 18	8m + 20	10m + 26	12m + 36		
7	2m + 37	4m + 29	6m + 25	8m + 25	10m + 29	12m + 37	14m + 49	
8	2m + 50	4m + 40	6m + 34	8m + 32	10m + 34	12m + 40	14m + 50	16m + 64

Таб. 1. $c^2(e, f)/4$.

Оценка точна ($e = 1$), только если $2m + 1$ является квадратом. В других случаях e определяется наименьшим номером строки таблицы 1, содержащей полный квадрат.

Отдельно перечислим случаи, когда наибольшей стороной оказывается c. Их всего 5.

$m = 3, a = 5, b = 5, c = 8, e = 2, f = 2,$
$m = 4, a = 5, b = 5, c = 6, e = 1, f = 1,$
$m = 5, a = 6, b = 8, c = 10, e = 3, f = 2,$
$m = 6, a = 7, b = 11, c = 14, e = 5, f = 3,$
$m = 8, a = 10, b = 10, c = 12, e = 2, f = 2.$