О. Б. Полубасов   29.05.2014 г.

===========ММ193===============

ММ193 (6 баллов)
Решения принимаются, по крайней мере, до 26.09.14

Игроки Вася, Федя и Коля сыграли несколько паркий в настольный теннис навылет. Сколько партий мог сыграть Коля, если Вася сыграл a партий, а Федя - b?
Примечания:
участники первой партии определяются жребием;
для определенности будем считать, что b ≤ a.

==========================

Пусть Коля сыграл *c* партий.

Число партий n = (a + b + c)/2, следовательно, a + b + c чётно.

Каждый игрок может сыграть не больше n партий, а значит, выполняется условие треугольника (возможно, вырожденного): a – b ≤ c ≤ a + b.

Теперь учтём, что игра "на победителя".

Если игрок пропустил партию, то в следующей – участвует (если она проводится), поэтому он участвует не менее чем в (n-1)/2 партиях.

Всего получаем одно равенство и 5 неравенств:

(a + b + c) mod 2 = 0,
b ≤ a,
c ≥ a – b,
c ≥ (a + b – 2)/3,
c ≤ a + b,
c ≤ 3b – a + 2.

a\b	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	0 – 2	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2	-	1 – 3	2 – 4	-	-	-	-	-	-	-	-
3	-	2	1 – 5	2 – 6	-	-	-	-	-	-	-
4	-	-	2 – 4	3 – 7	2 – 8	-	-	-	-	-	-
5	-	-	3	2 – 6	3 – 9	4 – 10	-	-	-	-	-
6	-	-	-	3 – 5	4 – 8	3 – 11	4 – 12	-	-	-	-
7	-	-	-	4	3 – 7	4 – 10	5 – 13	4 – 14	-	-	-
8	-	-	-	-	4 – 6	5 – 9	4 – 12	5 – 15	6 – 16	-	-
9	-	-	-	-	5	4 – 8	5 – 11	6 – 14	5 – 17	6 – 18	-
10	-	-	-	-	-	5 – 7	6 – 10	5 – 13	6 – 16	7 – 19	6 – 20

Таб. 1. Возможные значения a, b и c, если n ≥ 1.

Если «несколько» партий означает, что n ≥ k, то необходимо добавить ещё одно условие: c ≥ 2k – a – b. Пусть 1 и 2 – ещё не «несколько». Положим k = 3. Тогда две первые строки таблицы изменятся.

a\b	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2	-	3	2 – 4	-	-	-	-	-	-	-	-

Таб. 2. Возможные значения a, b и c, если n ≥ 3 (первые две строки).

Ответ. max(a – b, (a + b – 2)/3) ≤ c ≤ min(a + b, 3b – a + 2, 2k – a – b), (a + b + c) mod 2 = 0.

Обобщение

Пусть в игре участвуют m человек. Пусть i-й участник сыграл x_i партий. Тогда общее число партий $n = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} x_i$, то есть, $\sum_{i=1}^{m} x_i$ чётна.
Каждый игрок может сыграть не больше n партий, а значит, $x_i \le \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} x_j$.

Пусть игра проводится "на победителя", и участники соблюдают очередь. Если игрок проиграл в партии, то следующие m-2 партии пропускает, а в следующей снова участвует (пока игра не закончится), поэтому он участвует не менее чем в (n-m+2)/(m-1) партиях.

Всего получаем одно равенство и систему неравенств:

$\sum_{i=1}^{m} x_i$ = 0 mod 2.

$x_i \le \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} x_j$, i = 1..m.

$x_i \ge \frac{\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} x_j - 2m + 4}{2m-3}$, i = 1..m.

$x_i \ge 2k - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} x_j$, i = 1..m. k – ограничение снизу на число партий.

Многомерные таблицы рисовать сложно, но всё и без них понятно.