О. Б. Полубасов   02.10.2014 г.

===========MM194===============

MM194 (6 баллов)

Решения принимаются, по крайней мере, до 3.10.14

Из n натуральных чисел, идущих подряд, выбрали 6 и разбили их на две тройки. При этом оказалось, что площади треугольников, стороны которых равны числам из этих троек, равны. При каком наименьшем n возможна такая ситуация?

===========================

Пусть стороны первого треугольника равны (x, x+b, x+c), а стороны второго – (x+d, x+e, x+f), где x – натуральное число, а b, c, d, e, f – различные натуральные числа, b < c, d < e < f. Требуется минимизировать n = max (c, f) + 1, то есть, будем считать, что либо c = n – 1, либо f = n – 1.

Обозначим через S_1 площадь первого треугольника, а через S_2 – второго. По формуле Герона:

$$16S_1^2 = 2(x^2(x+b)^2 + x^2(x+c)^2 + (x+b)^2(x+c)^2) - (x^4 + (x+b)^4 + (x+c)^4)$$
$$= 3x^4 + (4b+4c)x^3 + (8bc-2b^2-2c^2)x^2 + (4b^2c+4bc^2-4b^3-4c^3)x + (2b^2c^2-b^4-c^4),$$

$$16S_2^2 = 2((x+d)^2(x+e)^2 + (x+d)^2(x+f)^2 + (x+e)^2(x+f)^2) - ((x+d)^4 + (x+e)^4 + (x+f)^4)$$
$$= 3x^4 + (4d+4e+4f)x^3 + (8de+8df+8ef-2d^2-2e^2-2f^2)x^2$$
$$+ (4d^2e+4de^2+4d^2f+4df^2+4e^2f+4ef^2-4d^3-4e^3-4f^3)x$$
$$+ (2d^2e^2+2d^2f^2+2e^2f^2-d^4-e^4-f^4).$$

Приравнивая, получаем уравнение третьей степени относительно x:

$$(4d+4e+4f-4b-4c)x^3$$
$$+ (8de+8df+8ef-2d^2-2e^2-2f^2-8bc+2b^2+2c^2)x^2$$
$$+ (4d^2e+4de^2+4d^2f+4df^2+4e^2f+4ef^2-4d^3-4e^3-4f^3-4b^2c-4bc^2+4b^3+4c^3)x$$
$$+ (2d^2e^2+2d^2f^2+2e^2f^2-d^4-e^4-f^4-2b^2c^2+b^4+c^4) = 0.$$

Решим это уравнение для каждого из сочетаний значений b, c, d, e, f.

Если c = n – 1, то число сочетаний равно $\frac{(n-2)!}{6(n-6)!}$. Если f = n – 1, то число сочетаний равно $\frac{(n-2)!}{4(n-6)!}$, а в сумме $\frac{5(n-2)!}{12(n-6)!}$.

При n = 6 нет решений в натуральных числах.

При n = 7 есть пять решений в натуральных числах, но полученные значения не удовлетворяют условию треугольника (x > c – b, x > f – d – e).

Подходящие решения начинаются с n = 8.

n	(x, x+b, x+c)	(x+d, x+e, x+f)	$16S^2$
8	(3, 8, 10)	(4, 5, 6)	1575
8	(31, 36, 37)	(32, 34, 38)	4193280
9	(2, 9, 10)	(4, 5, 8)	1071
9	(3, 10, 11)	(5, 6, 7)	3456
9	(11, 17, 18)	(13, 14, 19)	132480
9	(13, 16, 21)	(14, 15, 19)	172800
9	(17, 24, 25)	(20, 21, 23)	608256
9	(19, 25, 26)	(20, 23, 27)	806400
10	(4, 10, 13)	(5, 6, 8)	3591
10	(6, 10, 12)	(8, 9, 15)	14336
10	(6, 12, 15)	(8, 9, 10)	18711
10	(9, 16, 17)	(11, 13, 18)	80640
10	(13, 16, 20)	(14, 15, 22)	172431
10	(15, 22, 23)	(16, 20, 24)	403200
10	(22, 28, 30)	(24, 25, 31)	1382400
10	(58, 64, 66)	(59, 62, 67)	45480960
11	(2, 11, 12)	(3, 8, 10)	1575
11	(2, 11, 12)	(4, 5, 6)	1575
11	(6, 13, 14)	(7, 12, 16)	24255
11	(6, 14, 16)	(7, 12, 13)	27648
11	(7, 15, 16)	(10, 11, 17)	43776
11	(8, 16, 17)	(10, 13, 18)	64575
11	(13, 21, 22)	(14, 19, 23)	282240
11	(16, 23, 25)	(18, 20, 26)	516096
11	(34, 41, 43)	(35, 39, 44)	6796800
11	(45, 51, 54)	(47, 48, 55)	18144000

Таблица 1. Подходящие решения при n от 8 до 11.

Ответ. Наименьшее n равно 8.

Любопытно, что треугольники (3, 8, 10), (4, 5, 6) и (2, 11, 12) имеют одинаковую площадь.