О. Б. Полубасов   29.10.2014 г.

==========================

В задачах ММ197 и ММ198 так же, как в задачах ММ145,146,147,150, под многоугольником понимается фигура, ограниченная плоской несамопересекающейся замкнутой ломаной, никакие три последовательные вершины которой не лежат на одной прямой.

===========ММ197===============

ММ197 (5 баллов)
Решения принимаются, по крайней мере, до 31.10.14

Будем говорить, что n-угольник относится к классу k, если его можно разрезать на k треугольников одной прямой и нельзя разрезать одной прямой на большее число треугольников. Найти все возможные значения k для $n = 2014$.

Примечания:
1. Никаких других фигур при разрезании возникать не должно.
2. Если вышеописанный разрез осуществить нельзя, многоугольник относится к классу 0.
==========================

Удобнее решать обратную задачу: если n-угольник разрезали одной прямой на k треугольников, то какие значения может принимать n?

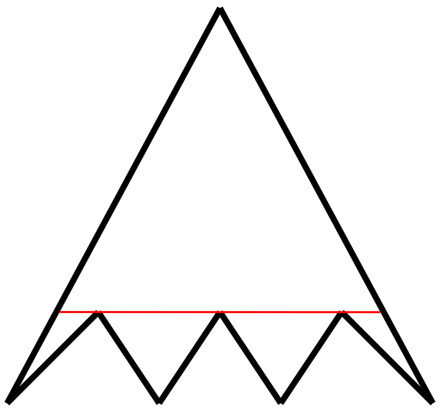

Рис. 1. n = 2k – 2.

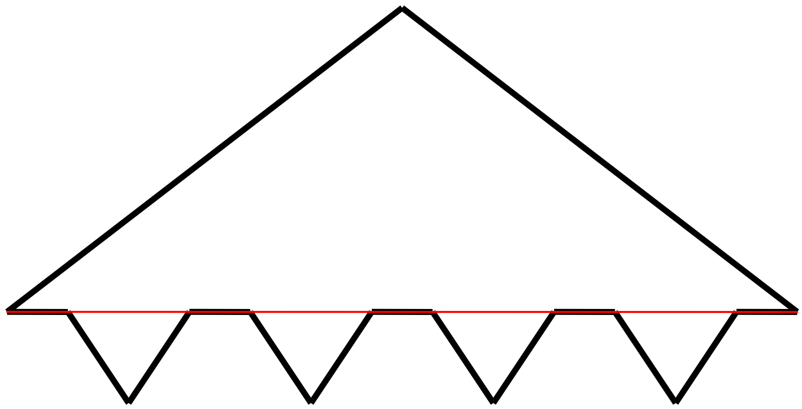

Рис. 2. n = 3k.

На рис. 1 показан n-угольник с минимальным числом сторон, а на рис. 2 – с максимальным. Минимальность числа сторон доказывается тем, что в каждом треугольнике только одна сторона может (и должна) совпадать с частью разреза, а две остальные должны быть сторонами n-угольника. Две стороны удалось сэкономить за счёт проведения разреза от сторон n-угольника, а не от углов.

Максимальность числа сторон определяется условием, что никакие три последовательные вершины не лежат на одной прямой. Дополнительные стороны n-угольника не могут быть сторонами треугольников, а должны лежать на разрезе, а значит, их не может быть больше чем k.

Способ получения рис. 2 из рис. 1 очевиден. Понятно, что возможны любые промежуточные значения.

Подставляя в уравнения значение $n = 2014$, получаем:
$k \le (2014+2)/2 = 1008$,
$k \ge 2014/3 > 671$.

Ответ. Либо $k = 0$, либо $672 \le k \le 1008$.

Обобщение. Решить ту же задачу, но не для треугольников, а для выпуклых m-угольников.

Рассуждения совершенно аналогичны.

Минимальность числа сторон n-угольника доказывается тем, что в каждом m-угольнике только одна сторона может (и должна) совпадать с частью разреза, а m-1 остальных должны быть сторонами n-угольника. (Для невыпуклых это тоже верно, но надо доказывать отдельно.) Две стороны удаётся сэкономить за счёт проведения разреза от сторон n-угольника, а не от углов. Получаем: $n = (m-1)k - 2$.

Максимальность числа сторон определяется условием, что никакие три последовательные вершины не лежат на одной прямой. Дополнительные стороны n-угольника не могут быть сторонами m-угольников, а должны лежать на разрезе, а значит, их не может быть больше чем k. Получаем: $n = mk$.

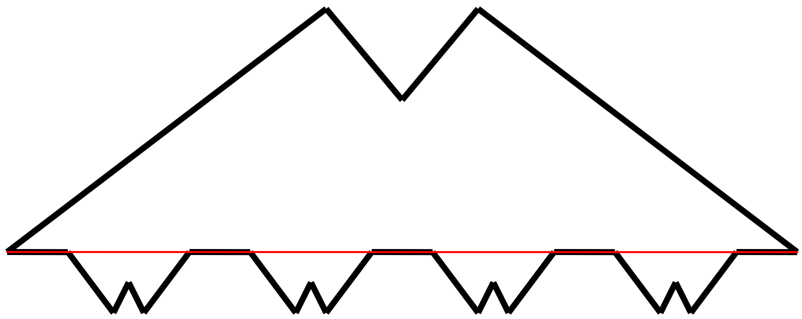

Рис. 3. Прямая разрезает 25-угольник на 5 невыпуклых пятиугольников.

Подставляя в уравнения значение $n = 2014$, получаем:
Либо $k = 0$, либо $2014/m \le k \le (2014+2)/(m-1)$, $m \le 1009$.