О. Б. Полубасов   3.11.2014 г.

===========MM198===============

MM198 (8 баллов)
Решения принимаются, по крайней мере, до 7.11.14

Будем говорить, что n-угольник относится к классу s, если его можно триангулировать на n-2 треугольника внутренними диагоналями в точности s различными способами. Найти три наименьших и три наибольших значения s для $n = 20$.

==========================

Определения.

Рёбрами будем называть неупорядоченные пары вершин многоугольника. Будем говорить, что *ребро существует*, если оно является внутренней диагональю или стороной многоугольника. *Длиной ребра* будем называть расстояние между вершинами по периметру многоугольника. Длина есть даже у отсутствующих рёбер.

1. Наибольшие значения s

Больше всего рёбер у выпуклых многоугольников, поэтому больше всего и их комбинаций, дающих триангуляцию. Известно, что количество триангуляций выпуклого n-угольника – это число Каталана C(n-2).

OEIS A000108, нумерация от 0:
1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, 58786, 208012, 742900, 2674440, 9694845, 35357670, 129644790, 477638700…

Таким образом, наибольшее значение s равно C(18) = 477638700.

Чтобы найти второе из наибольших значений s, представляется разумным исключить одно из рёбер. Предположим, что в n-угольнике отсутствует ребро длины h. Тогда число триангуляций s = C(n-2) – C(h-1)C(n-h-1). Чем больше h, тем больше s, поэтому выгоднее исключать рёбра большей длины. Но если в n-угольнике отсутствует ребро длины h, то должна отсутствовать вся цепочка рёбер с длинами от 2 до h, инцидентных вершине. Поэтому единственное отсутствующее ребро может быть только длины 2.

Аналогично, чтобы найти третье из наибольших значений s, представляется разумным исключить ещё одно ребро. Причём, теперь уже можно исключить ребро длины 3.

Этот процесс можно продолжать. Способ построения серии n-угольников, показанный на рис. 1-3, позволяет строить n-угольники, у которых отсутствует любое количество рёбер от 0 до n-3. Если отсутствует k рёбер, то их длины – от 2 до k+1. На рис. 1 отсутствует одно ребро, на рис. 2 – (n-3)/2 рёбер, на рис. 3 – n-3 ребра.

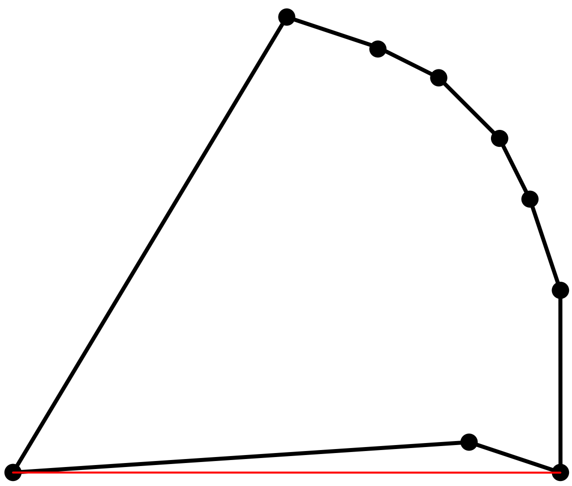

Рис. 1. Отсутствует одно ребро. Показано красным цветом.

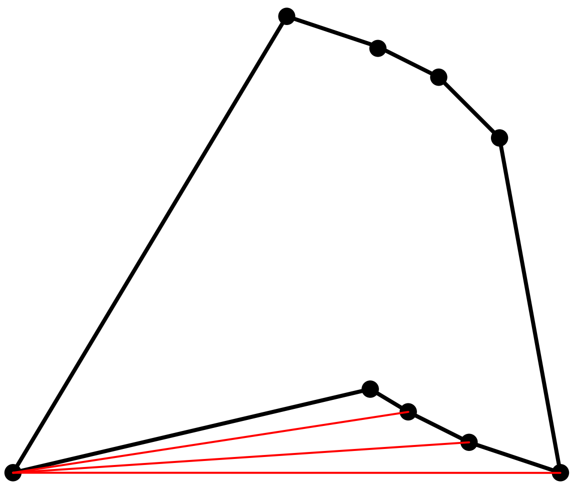

Рис. 2. Отсутствуют (n-3)/2 рёбер.

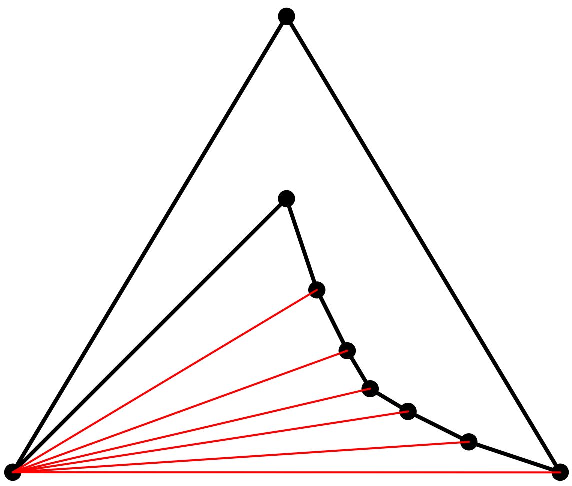

Рис. 3. Отсутствуют n-3 ребра.

Методом включения-исключения можно вывести формулу зависимости количества триангуляций от n и k:

$$s = C(n-2) - \sum_{i=1}^{k} C(i-1)C(n-2-i), \qquad 0 \le k \le n-3.$$

Значения s для n = 20 представлены в таблице 1.

k	s
0	477638700
1	347993910
2	312636240
3	293246550
4	279874350
5	269473750
6	260737246
7	252977494
8	245772010
9	238819350
10	231866690
11	224661206
12	216901454
13	208164950
14	197764350
15	184392150
16	165002460
17	129644790

Таб. 1. Зависимость s от числа исключённых рёбер для n = 20.

2. Вторая серия n-угольников

Не следует полагать, что представленная в таб. 1 серия n-угольников даёт список наибольших значений s. Может оказаться, что исключение двух рёбер длины 2 выгоднее, чем исключение трёх рёбер с длинами 2, 3 и 4.

Способ построения серии n-угольников, показанный на рис. 4-6 позволяет строить n-угольники, у которых отсутствует одно отдельно расположенное ребро длины 2 и ещё любое количество рёбер от 1 до n-4. Если, кроме отдельно расположенного, отсутствуют ещё k рёбер, то их длины – от 2 до k+1. На рис. 4 отсутствуют два ребра длины 2, на рис. 5 – 1+(n-4)/2 рёбер, на рис. 6 – 1+n-4 ребра.

Методом включения-исключения можно вывести формулу зависимости количества триангуляций от n и k:

$$s = C(n-2) - C(n-3) - \sum_{i=1}^{k} C(i-1)\big(C(n-2-i) - C(n-3-i)\big),$$
$$1 \le k \le n-4.$$

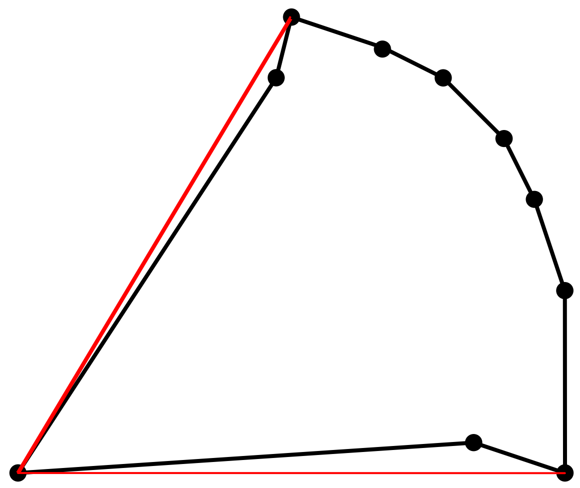

Рис. 4. Вторая серия n-угольников. Отсутствуют 1+1 рёбер.

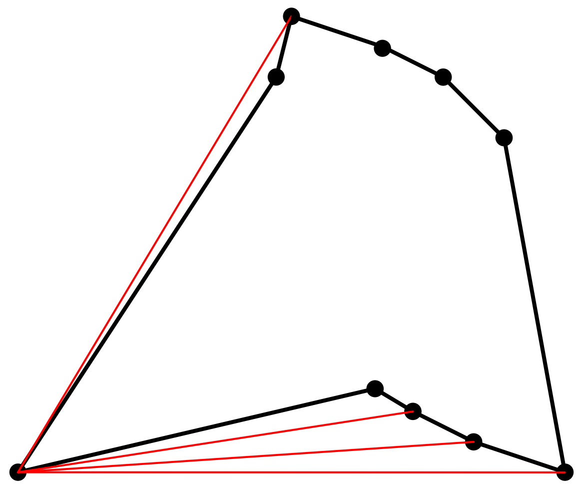

Рис. 5. Вторая серия n-угольников. Отсутствуют 1+(n-4)/2 рёбер.

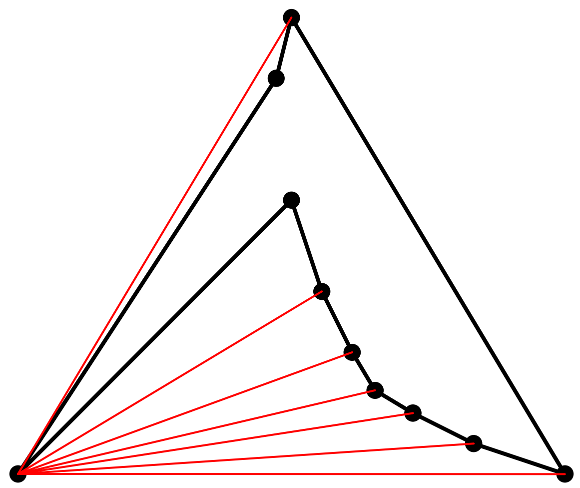

Рис. 6. Вторая серия n-угольников. Отсутствуют 1+n-4 ребра.

Значения s для второй серии 20-угольников представлены в таблице 2.

k	s
1	253706790
2	228043965
3	214003155
4	204345455
5	196857023
6	190589531
7	185046851
8	179927165
9	175019405
10	170152543
11	165164131
12	159873391
13	154049055
14	147362955
15	139339635
16	129644790

Таб. 2. Зависимость s от числа исключённых рёбер для второй серии 20-угольников.

Вторая серия заканчивается тем же значением s = C(17), что и первая. Поэтому рассмотренные последовательности значений вложены друг в друга. Существуют и другие серии построенных подобным образом n-угольников, и все последовательности их значений заканчиваются там же. Чтобы не рассматривать их все, имеет смысл ограничиться рассмотрением только начальных участков последовательностей, которые гарантированно не побеждаются другими сериями. Чтобы понять, где следует остановиться, вычислим значение s для первого члена наиболее конкурирующей серии n-угольников.

3. Третья серия n-угольников

Рассмотрим серию n-угольников, у которых отсутствуют два отдельно расположенных ребра с длинами 2 и 3 и ещё любое количество рёбер от 2 до n-5. Если, кроме отдельно расположенных, отсутствуют ещё k рёбер, то их длины – от 2 до k+1. Первый n-угольник серии показан на рис. 7. Отсутствуют два ребра с длинами 2 и 3 и ещё два ребра с длинами 2 и 3.

Методом включения-исключения можно вывести формулу зависимости количества триангуляций от n и k:

$$s = C(n-2) - C(n-3) - C(n-4) - \sum_{i=1}^{k} C(i-1)\big(C(n-2-i) - C(n-3-i) - C(n-4-i)\big),$$

$$2 \le k \le n-5.$$

Для первого 20-угольника серии s = C(18) – 2C(17) – C(16) + 2C(15) + C(14) = 477638700 – 2*129644790 – 35357670 + 2*9694845 + 2674440 = 205055580.

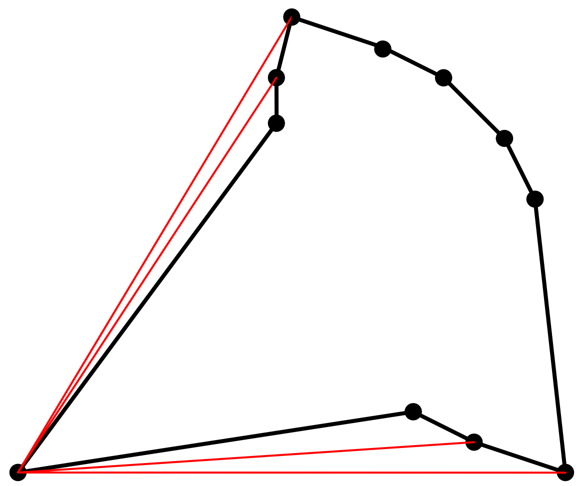

Рис. 7. Третья серия n-угольников. Отсутствуют 2+2 ребра.

Теперь можно составить список гарантированно наибольших значений s для n = 20.

№	ОТСУТСТВУЕТ РЁБЕР	s
1	0	477638700
2	1	347993910
3	2	312636240
4	3	293246550
5	4	279874350
6	5	269473750
7	6	260737246
8	1+1	253706790
9	7	252977494
10	8	245772010
11	9	238819350
12	10	231866690
13	1+2	228043965
14	11	224661206
15	12	216901454
16	1+3	214003155
17	13	208164950
18	2+2	205055580

Таб. 3. Наибольшие значения s в порядке убывания при n = 20.

Поразительно, что эти значения удалось найти, не используя машинный перебор.

4. Наименьшие значения s

Разместим вершины 1..n-2 n-угольника на вогнутой кривой, а вершины n-1 и n расположим отдельно (рис. 8, 9). Пусть существуют рёбра, соединяющие вершину n с вершинами 1..c и вершину n-1 с вершинами a..n-2. Так как, по условию, n-угольник несамопересекающийся, то a ≤ c. Любая триангуляция такого n-угольника имеет следующий вид: вершины 1..b соединяются с вершиной n, затем эстафета передаётся вершине n-1, и вершины b..n-2 соединяются с нею. Ровно одна вершина (а именно, b) соединена с обеими вершинами n и n-1, a ≤ b ≤ c.

Тогда число возможных триангуляций s = c – a + 1, так как вершину b можно выбрать именно таким числом способов. Варьируя расположение вершин n и n-1, можно добиться любого значения s от 1 (рис. 8) до n-2 (рис. 9).

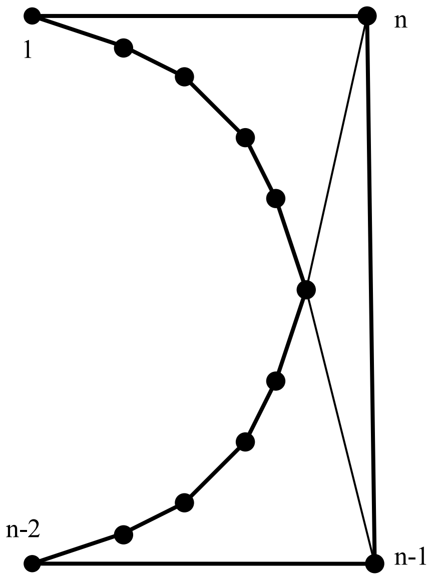

Рис. 8. a = c, s = 1.

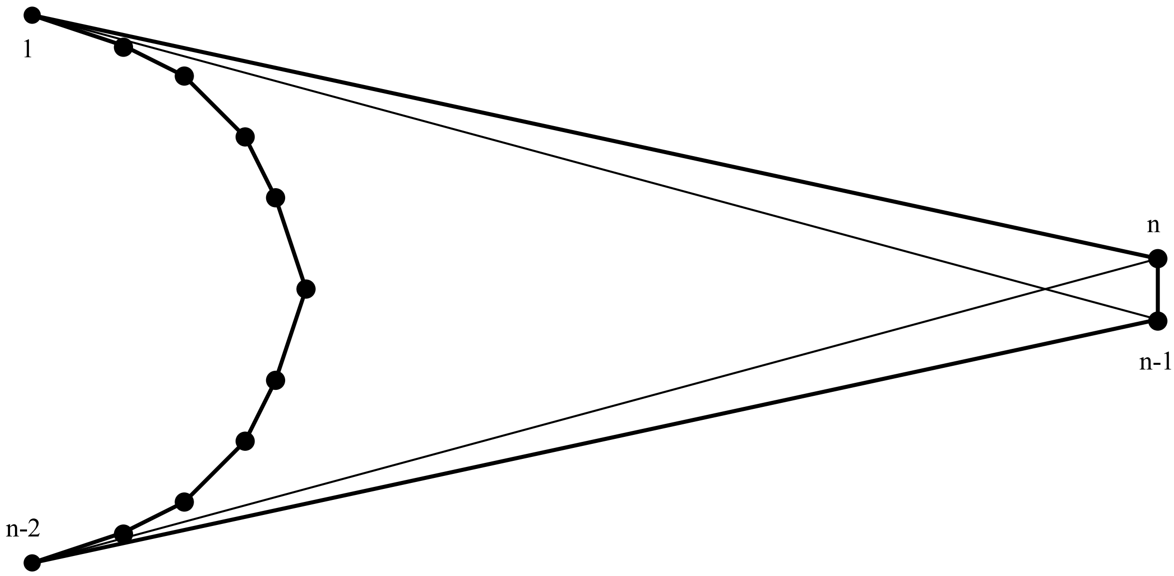

Рис. 9. a = 1, c = n-2, s = n-2.

Следовательно, 18 наименьших значений s для 20-угольника – это 1..18.

Расположив отдельно от остальных не две, а три или более вершины, длину непрерывного диапазона значений s нетрудно увеличить.