

=====MM200=====

MM200 (8 баллов)

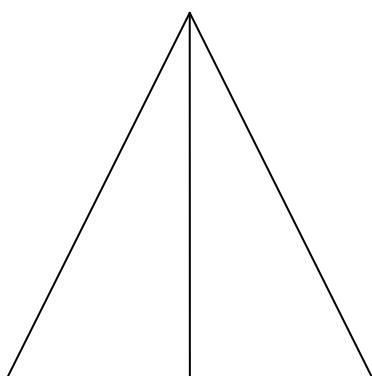
Решения принимаются, по крайней мере, до 28.11.14

Обозначим через $T(m)$ максимально возможное количество треугольников, на которые можно разрезать треугольник m прямыми. (Никаких других фигур, при разрезании возникать не должно.)

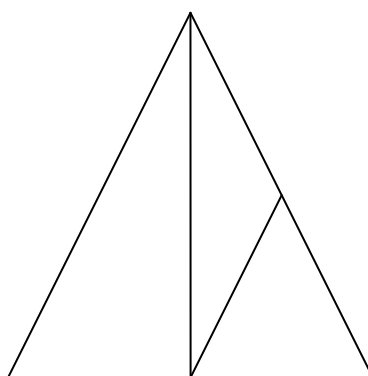
При каком наименьшем m значение отношения $\frac{T(m)}{m}$ достигает 4?

По традиции, рассмотрим последовательность значений $T(m)$ при малых m , начиная от $m = 0$: 1, 2, 3, 6, 8, 11, 14, 18, 22, 27, 32, 38, 44, 50, **58**, 66.

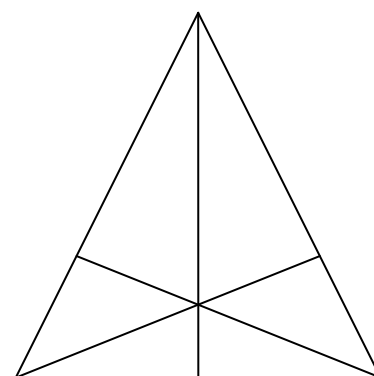
Значения $T(m)$ найдены вручную, их максимальность не гарантируется.



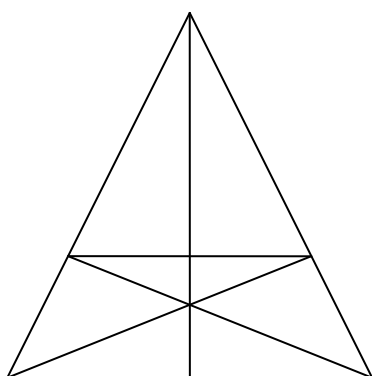
$T(1) \geq 2$



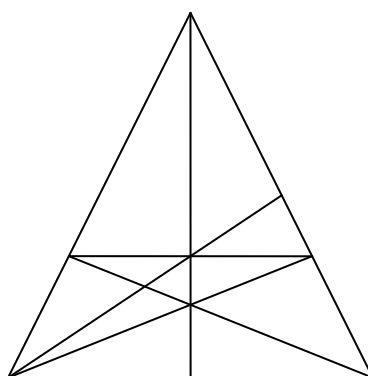
$T(2) \geq 3$



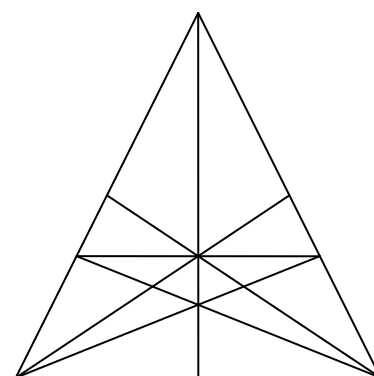
$T(3) \geq 6$



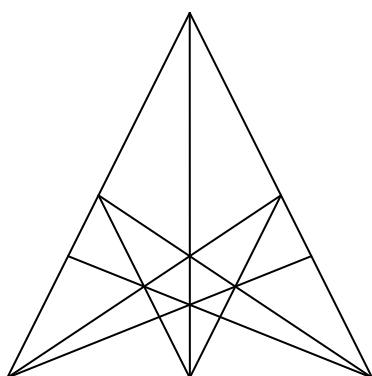
$T(4) \geq 8$



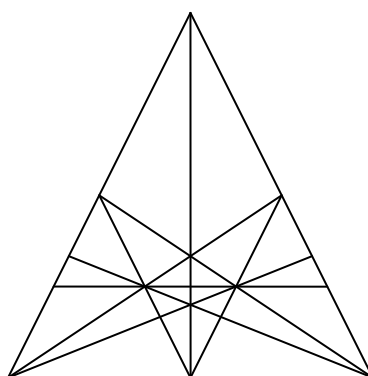
$T(5) \geq 11$



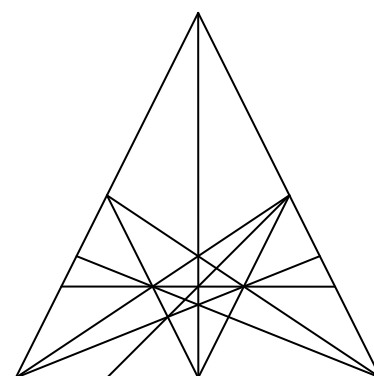
$T(6) \geq 14$



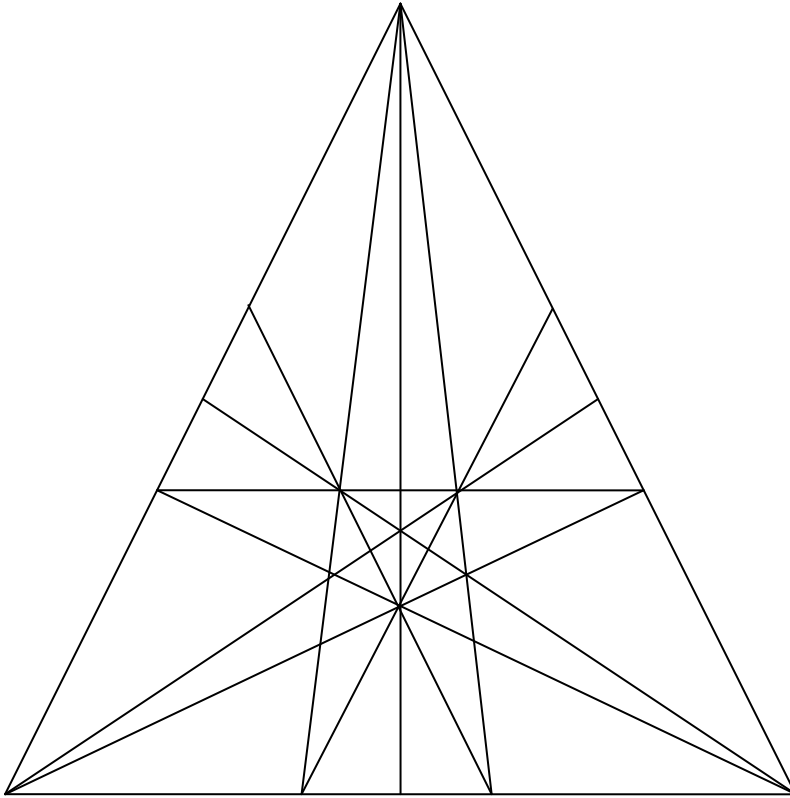
$T(7) \geq 18$



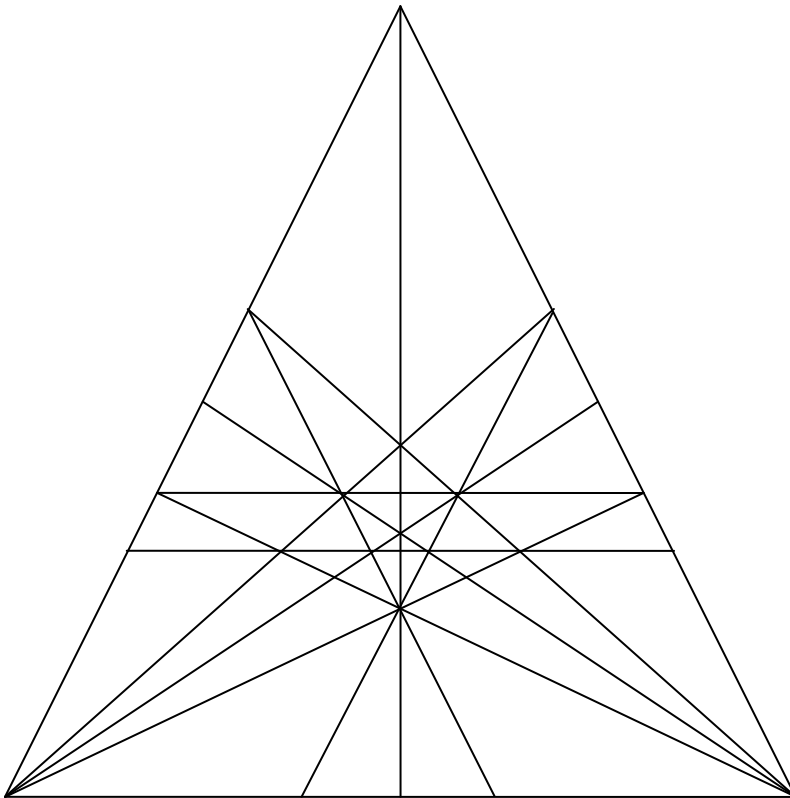
$T(8) \geq 22$



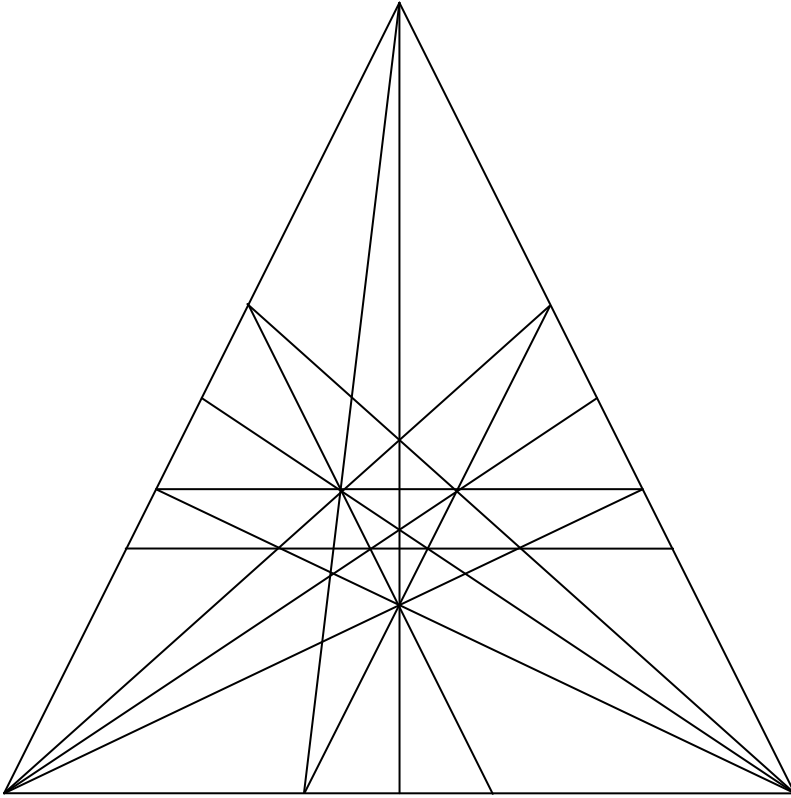
$T(9) \geq 27$



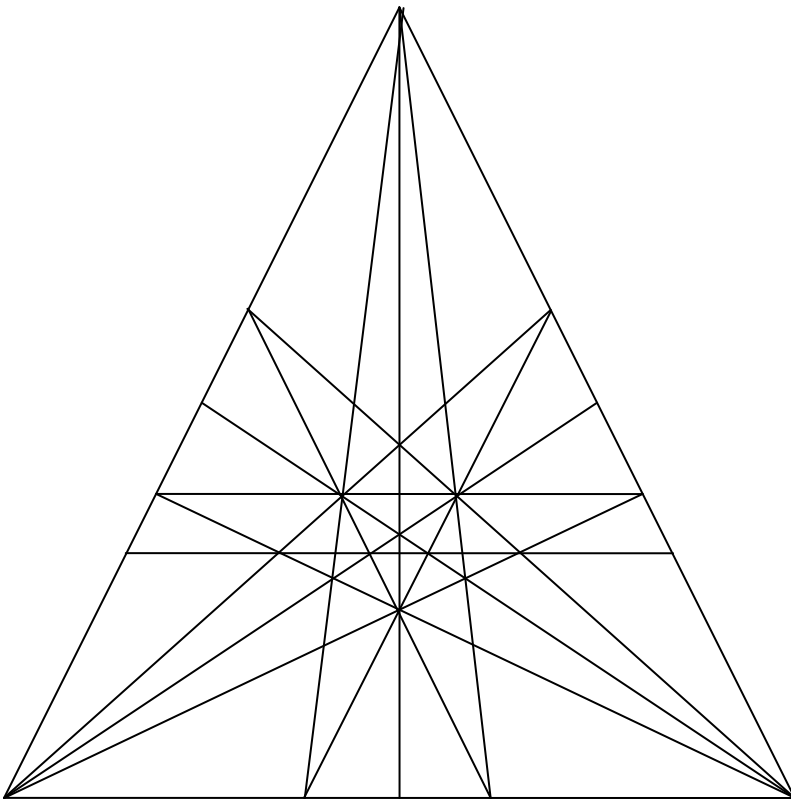
$T(10) \geq 32$



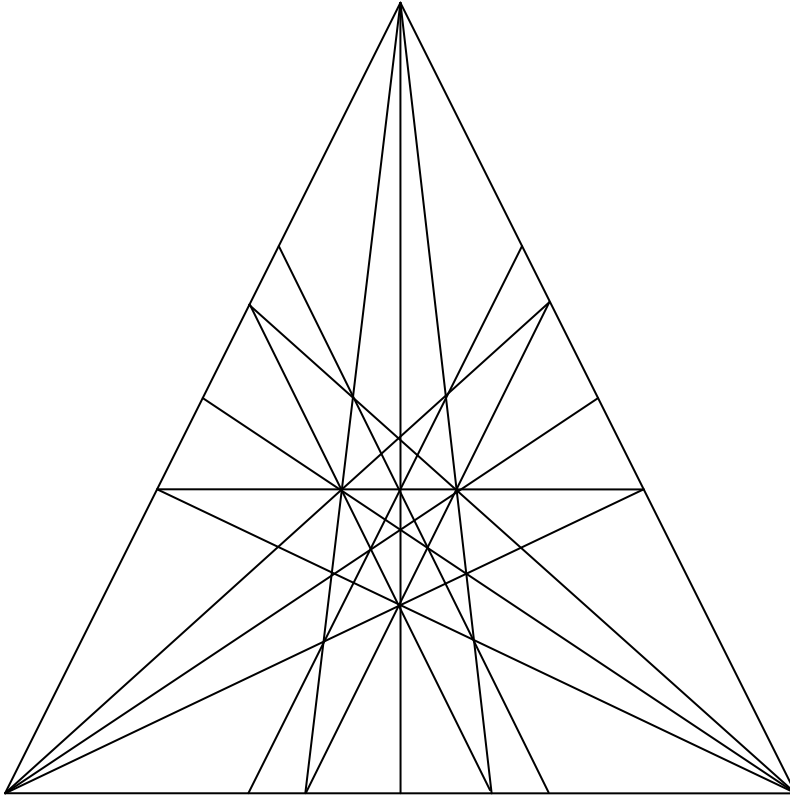
$T(11) \geq 38$



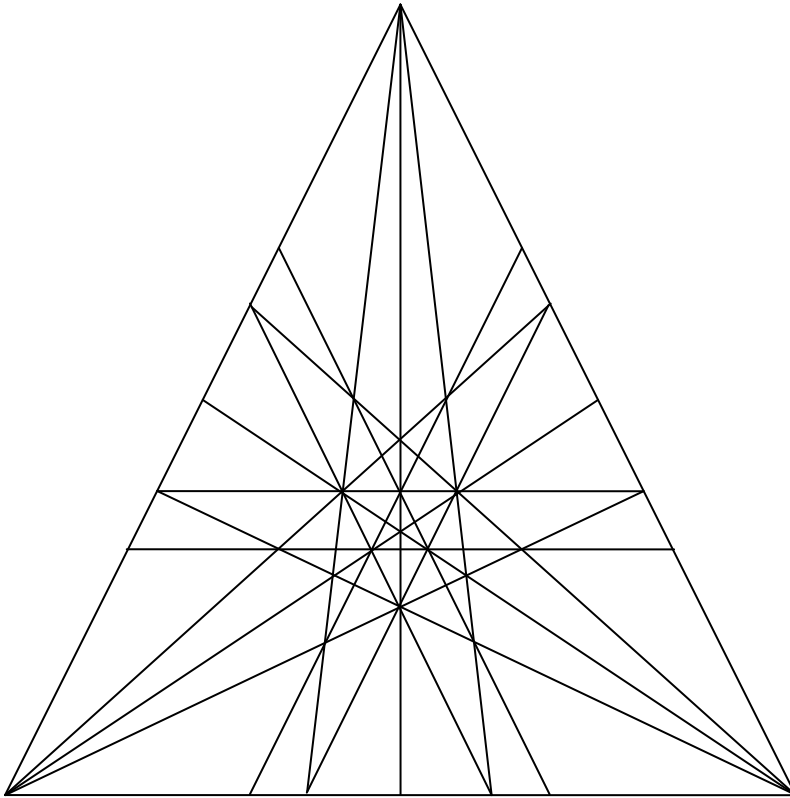
$$T(12) \geq 44$$



$$T(13) \geq 50$$



$T(14) \geq 58$



$T(15) \geq 66$

Рис. 1. Нижние границы $T(m)$ для m от 1 до 15.

$T(13) = 50$ чуть-чуть не дотягивает до $4m$, так что ответ: $m = 14$.

Анализируя последовательность $T(m)$, видим, что $T(13) = 50$ нарушает закономерность, поэтому надо попытаться найти $T(13) = 51$. На рис. 2. показано разбиение треугольника тринадцатью линиями на 51 треугольную грань.

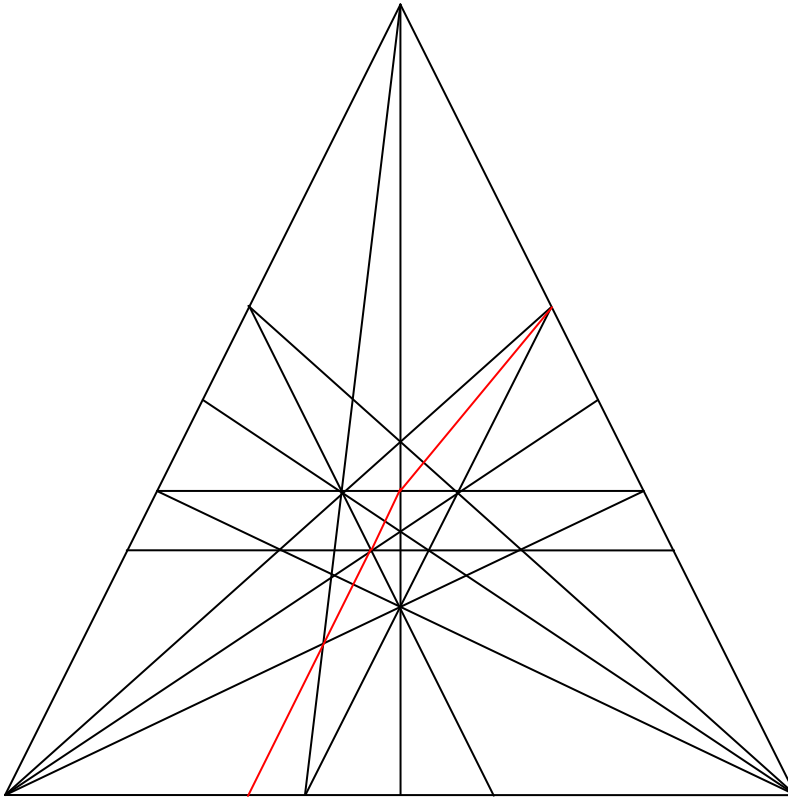


Рис. 2. $T(13) = 51$?

Красная линия – не прямая, но кажется очень вероятным, что немного изменив координаты вершин, можно добиться того, чтобы все линии стали прямыми. Однако, это ложное впечатление, система уравнений для данного разбиения несовместна. По крайней мере, мне найти решение не удалось.

Кроме условия, что все линии прямые, в проверке нуждается ещё одно. Если визуально на рисунке в одной точке пересекается больше двух прямых, то необходимо убедиться, что это действительно одна точка, а не несколько близко расположенных попарных пересечений прямых. Для проверки выбран пример $T(15) = 66$, поскольку пример $T(14) = 58$ отличается от него только отсутствием прямой 18. На рис. 3 указаны координаты вершин триангуляции, нумерация прямых показана красным цветом. Первые три прямые – это стороны исходного треугольника.

Проверка показала, что вершины триангуляции действительно лежат на указанных прямых. Заметим, что координаты большинства вершин иррациональны, причём некоторые из них весьма близки, например, $\frac{7\sqrt{5}-15}{4} \cong 0.163$, а $\frac{3\sqrt{5}-5}{10} \cong 0.171$, так что проверка совсем не лишняя.

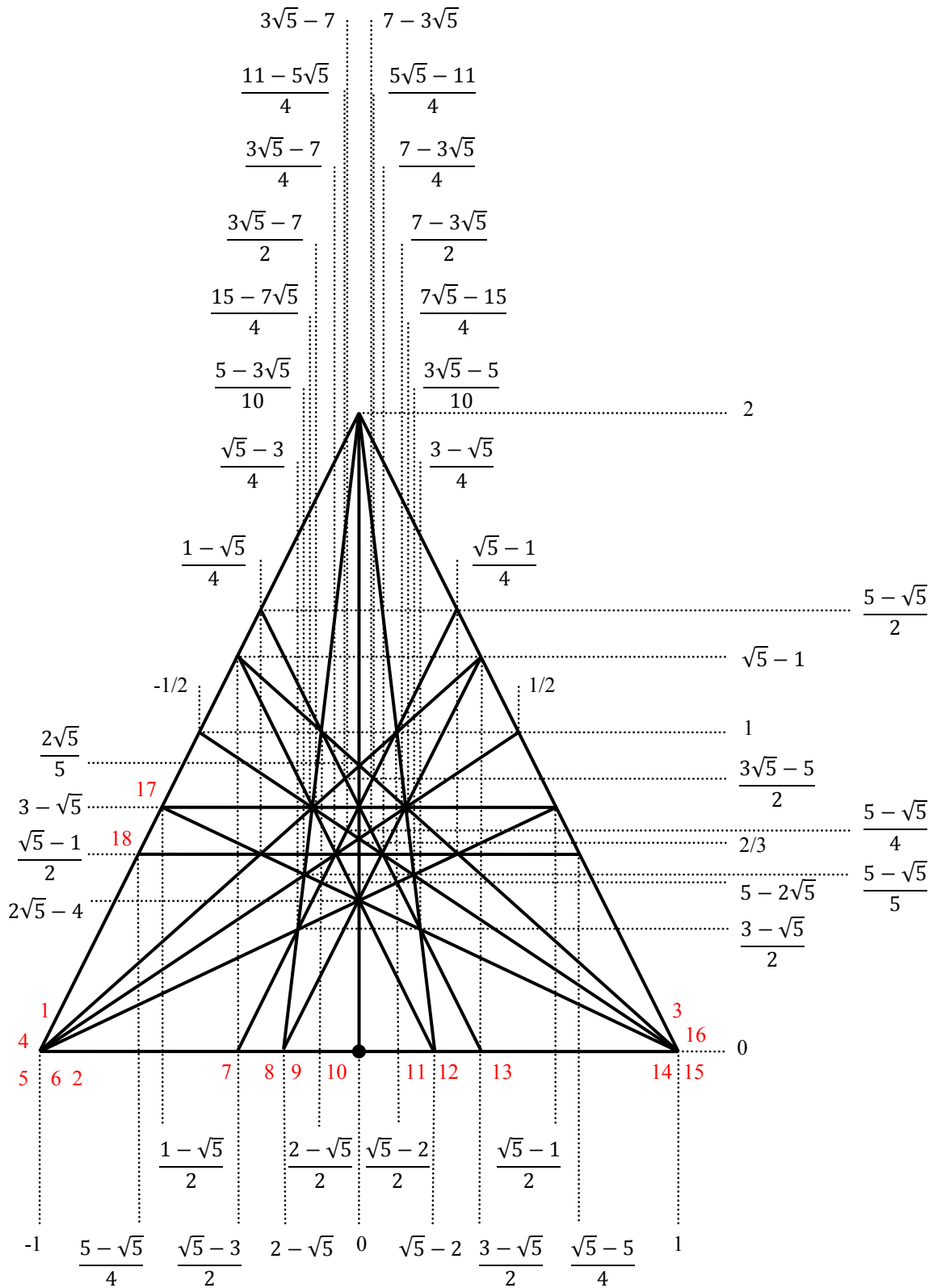


Рис. 3. Координаты вершин для примера $m = 15$.

Уравнения прямых.

1. $y = 2x + 2$
2. $y = 0$
3. $y = -2x + 2$
4. $y = \frac{2\sqrt{5}}{5}x + \frac{2\sqrt{5}}{5}$
5. $y = 2/3x + 2/3$
6. $y = (2\sqrt{5} - 4)x + 2\sqrt{5} - 4$
7. $y = 2x + 3 - \sqrt{5}$
8. $y = (2\sqrt{5} + 4)x + 2$
9. $y = 2x + 2\sqrt{5} - 4$
10. $x = 0$
11. $y = -2x + 2\sqrt{5} - 4$
12. $y = -(2\sqrt{5} + 4)x + 2$
13. $y = -2x + 3 - \sqrt{5}$
14. $y = (4 - 2\sqrt{5})x + 2\sqrt{5} - 4$
15. $y = -2/3x + 2/3$
16. $y = -\frac{2\sqrt{5}}{5}x + \frac{2\sqrt{5}}{5}$
17. $y = 3 - \sqrt{5}$
18. $y = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

При увеличении количества прямых число уравнений растёт быстрее, чем число переменных, поэтому попытка провести дополнительные прямые, проходящие через большое количество вершин, может привести к несовместности системы уравнений. Возникает вопрос, будет ли отношение $\frac{T(m)}{m}$ неограниченно расти с ростом m или имеет конечный предел?

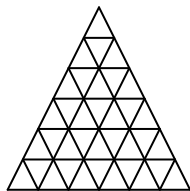


Рис. 4. Треугольная сетка.

Проведём в треугольнике $m = 3k$ прямых, параллельных сторонам (рис. 4). Тогда $T(m) = (k + 1)^2$, а значит, с ростом m отношение $\frac{T(m)}{m}$ неограниченно возрастает.

Попытка доказательства минимальности $m = 14$ (неудачная)

Теперь требуется доказать, что значение $m = 14$ действительно является наименьшим, то есть, что при $m < 14$ нет триангуляций с $\frac{T(m)}{m} \geq 4$. Для этого попытаемся найти такие триангуляции. Запишем ограничения:

$$1 \leq m \leq 13, \quad (1)$$

$$T \geq 4m. \quad (2)$$

Пусть V – число вершин триангуляции, E – число рёбер, P – число вершин на периметре треугольника. Так как все грани – треугольные, то

$$E = (3T + P)/2. \quad (3)$$

Следовательно:

$$T \bmod 2 = P \bmod 2. \quad (4)$$

По теореме Эйлера:

$$V = E - T + 1. \quad (5)$$

Множество прямых естественным образом разбивается на два подмножества: m_1 прямых, проходящих через вершины исходного треугольника, и m_2 прямых, не проходящих через эти вершины, $m_1 + m_2 = m$. (6)

При одинаковом числе инцидентных прямых вершины на периметре треугольника имеют степень меньше, чем вершины внутри треугольника. Поэтому вместо степени вершин удобнее пользоваться другим параметром. Назовём *рангом* вершины число инцидентных ей прямых (учитывая и стороны треугольника). Пусть R – сумма рангов всех вершин, тогда

$$R = E + m + 3. \quad (7)$$

Сумма рангов угловых вершин треугольника:

$$R_c = m_1 + 6. \quad (8)$$

Сумма рангов вершин на сторонах (но не в углах) треугольника:

$$R_p = P + 2m - m_1 - 3. \quad (9)$$

Сумма рангов внутренних вершин:

$$R_v = E - P - m. \quad (10)$$

Число вершин на периметре треугольника не превышает $2m + 3$. Введём в рассмотрение ещё одну полезную характеристику – разность между максимальным и истинным значением P : $dP = 2m + 3 - P$. (11)

Ограничение снизу числа вершин ранга больше 2 на периметре

Если на периметре нет вершин ранга больше 2, то первая же прямая отсекает от треугольника четырёхугольник, который невозможно разрезать на треугольники, не используя вершины ранга больше 2 на периметре (рис. 5).

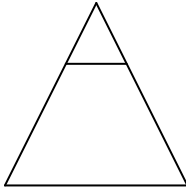


Рис. 5. На периметре нет вершин ранга больше 2.

Если на периметре одна вершина ранга $r > 2$, то через неё можно провести $r-2$ прямых, разрезающих исходный треугольник на $r-1$ треугольник. Любая другая прямая отсечёт от треугольника четырёхугольник, который невозможно разрезать на треугольники, не используя вершины ранга больше 2 на периметре.

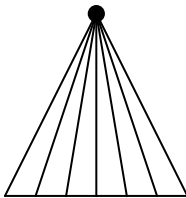


Рис. 6. На периметре одна вершина ранга больше 2.

При двух вершинах ранга $r > 2$ на периметре возможны две схемы триангуляции. Никаких других прямых провести нельзя. Число граней на 1 больше числа прямых.

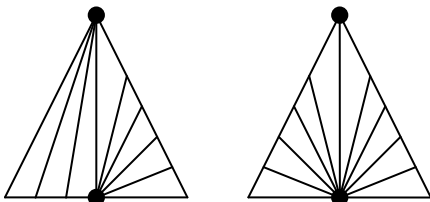


Рис. 7. На периметре две вершины ранга больше 2.

При трёх вершинах ранга $r > 2$ на периметре возможны пять схем триангуляции. Никаких других прямых провести, по-прежнему, нельзя. В первой схеме число граней вдвое больше числа прямых, в остальных – на 1 больше числа прямых.

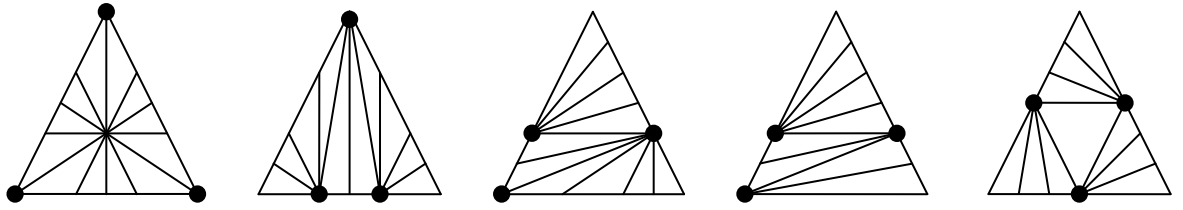
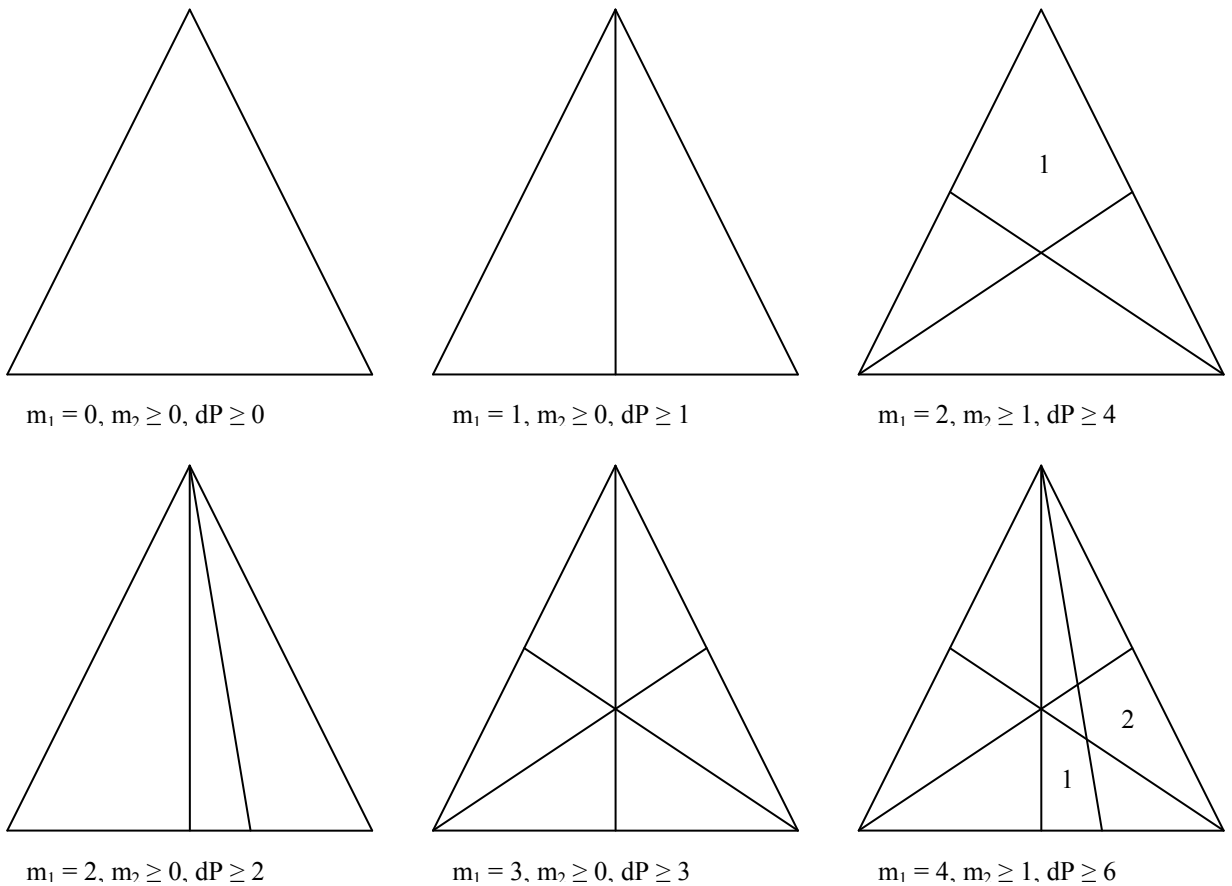


Рис. 8. На периметре три вершины ранга больше 2.

Таким образом, требуется не менее 4 вершин ранга больше 2 на периметре треугольника, а следовательно, $dP \geq 4$. (12)

Диапазон возможных значений m_1

Как мы помним, m_1 – это число прямых, проходящих через вершины исходного треугольника, m_2 – число прямых, не проходящих через эти вершины, $m_1 + m_2 = m$. На рис. 9 рассмотрены разбиения треугольника при различных значениях m_1 . Образованные не треугольные грани пронумерованы. Поскольку одной прямой невозможно разделить на треугольники более двух не треугольных граней, примыкающих к сторонам исходного треугольника, то величина m_2 ограничена снизу. Так как разделение на треугольники каждой не треугольной грани, примыкающей к стороне исходного треугольника, увеличивает ранг вершины на стороне на 1, то значения dP также ограничены снизу. Кроме того, $P \geq m_1 + 3$. (13)



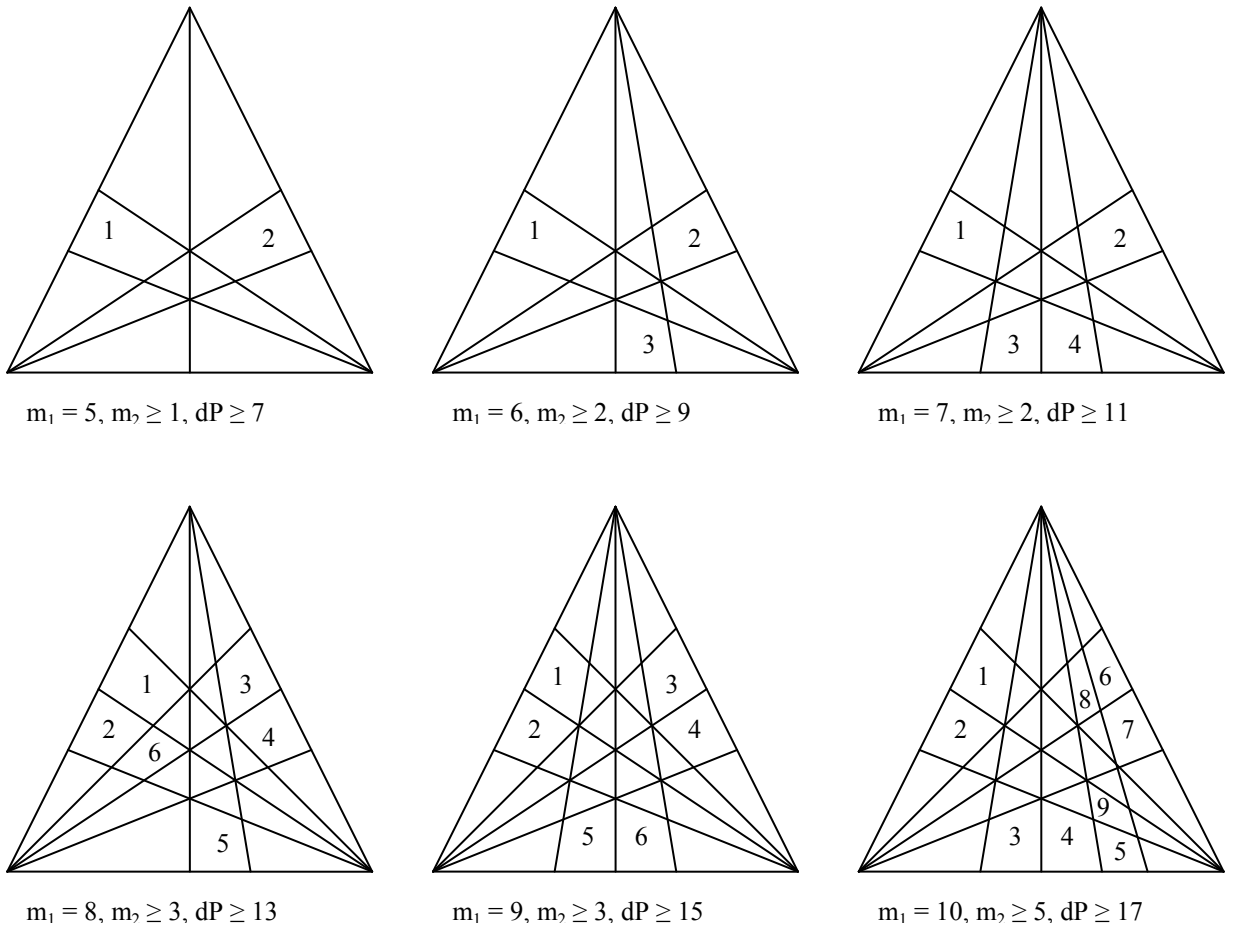
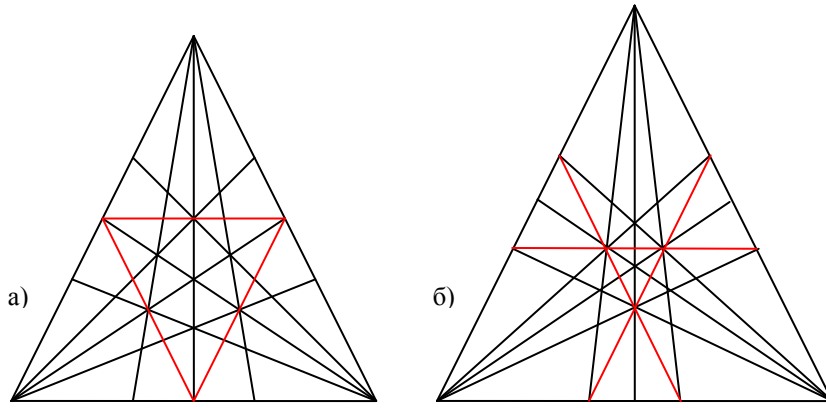


Рис. 9. Разбиения треугольника при различных значениях m_1 .

Возможны и другие разбиения треугольника с помощью m_1 прямых, проходящих через углы, но при неплотном распределении рангов угловых вершин число не треугольных граней может только возрастать. Исключение составляет случай $m_1 = 2$, но это исключение не имеет важного значения, так как величина m_2 , кроме ограничения, указанного на рис. 9, ограничена снизу также значением $m - m_1$, а, по формуле (12), $dP \geq 4$.

Если $m_1 = 10$, то $m_2 \geq 5$, то есть, $m \geq 15$, поэтому при $m < 15$ не может быть $m_1 > 9$. В то же время, при $m_1 = 9$ образуется шесть 4-угольных граней, которые можно разбить на треугольники, проведя три дополнительные прямые (рис. 10.а, б). В обоих способах разбиения результирующее число граней равно 42, что при $m = 12$ меньше требующихся $4m = 48$, поэтому при $m = 12$ должно быть $m_1 \leq 8$.

Рис. 10. $m_1 = 9$, $m = 12$, $T = 42$.

Ограничение сверху числа пар пересекающихся прямых

Подсчитаем число пар пересекающихся прямых (без учёта пересечений со сторонами треугольника). Если внутренняя вершина триангуляции имеет ранг k , то в этой вершине пересекается $k(k-1)/2$ пар прямых. Если вершина на стороне треугольника имеет ранг k , то в этой вершине пересекается $(k-1)(k-2)/2$ пар прямых. Если угловая вершина имеет ранг k , то в этой вершине пересекается $(k-2)(k-3)/2$ пар прямых. Таким образом, для того чтобы минимизировать число пар пересекающихся прямых, распределение рангов вершин должно быть как можно более плотным. Пусть

$$\overline{Rc} = \left\lfloor \frac{Rc}{3} \right\rfloor - \text{средний ранг угловой вершины,}$$

$$Rc \bmod 3 = C_1,$$

$$\overline{Rp} = \left\lfloor \frac{Rp}{P-3} \right\rfloor - \text{средний ранг вершины на стороне треугольника,}$$

$$Rp \bmod (P-3) = P_1,$$

$$\overline{Rv} = \left\lfloor \frac{Rv}{V-P} \right\rfloor - \text{средний ранг внутренней вершины,}$$

$$Rv \bmod (V-P) = V_1.$$

Тогда удвоенный минимум числа пар пересекающихся прямых равен

$$\begin{aligned} 2Nc = & C_1 (\overline{Rc} - 1) (\overline{Rc} - 3) + (3 - C_1) (\overline{Rc} - 2) (\overline{Rc} - 3) \\ & + P_1 \overline{Rp} (\overline{Rp} - 1) + (P - 3 - P_1) (\overline{Rp} - 1) (\overline{Rp} - 2) \\ & + V_1 (\overline{Rv} + 1) \overline{Rv} + (V - P - V_1) \overline{Rv} (\overline{Rv} - 1) \end{aligned} \quad (14)$$

С другой стороны, никакая прямая не может пересечь более чем $m-1$ прямых, поэтому:

$$2Nc \leq m(m-1). \quad (15)$$

Применение ограничений

Легко видеть, что все рассмотренные характеристики триангуляции можно выразить через четыре базовых параметра: m , T , P и m_1 . Применяя ко всем возможным комбинациям (m, T, P) ограничения, заданные формулами (1), (2), (4), (12), (13), (15) и рис. 9, получим 66 троек. Из них 16 вариантов при $m = 12$ и 50 вариантов при $m = 13$. Под каждой тройкой (m, T, P) может скрываться несколько принципиально различных триангуляций.

(12, 48, 22), (12, 48, 20), (12, 48, 18), (12, 48, 16), (12, 48, 14), (12, 48, 12), (12, 49, 21),
 (12, 49, 19), (12, 49, 17), (12, 49, 15), (12, 49, 13), (12, 50, 18), (12, 50, 16), (12, 50, 14),
 (12, 50, 12), (12, 51, 15),

(13, 52, 24), (13, 52, 22), (13, 52, 20), (13, 52, 18), (13, 52, 16), (13, 52, 14), (13, 52, 12),
 (13, 52, 10), (13, 53, 25), (13, 53, 23), (13, 53, 21), (13, 53, 19), (13, 53, 17), (13, 53, 15),
 (13, 53, 13), (13, 53, 11), (13, 54, 24), (13, 54, 22), (13, 54, 20), (13, 54, 18), (13, 54, 16),
 (13, 54, 14), (13, 54, 12), (13, 55, 25), (13, 55, 23), (13, 55, 21), (13, 55, 19), (13, 55, 17),
 (13, 55, 15), (13, 55, 13), (13, 55, 11), (13, 56, 24), (13, 56, 22), (13, 56, 20), (13, 56, 18),
 (13, 56, 16), (13, 56, 14), (13, 56, 12), (13, 57, 23), (13, 57, 21), (13, 57, 19), (13, 57, 17),
 (13, 57, 15), (13, 57, 13), (13, 58, 20), (13, 58, 18), (13, 58, 16), (13, 58, 14), (13, 59, 17),
 (13, 59, 15).

Теперь надо попытаться построить какую-нибудь триангуляцию с вышеуказанными параметрами, а если это не удастся, то выяснить причину неудачи и попытаться сформулировать новые ограничения. Наиболее перспективными выглядят тройки $(13, 52, 16)$ и $(13, 52, 14)$. И действительно, триангуляцию с параметрами $(13, 52, 14)$ построить не так уж трудно (рис. 11).

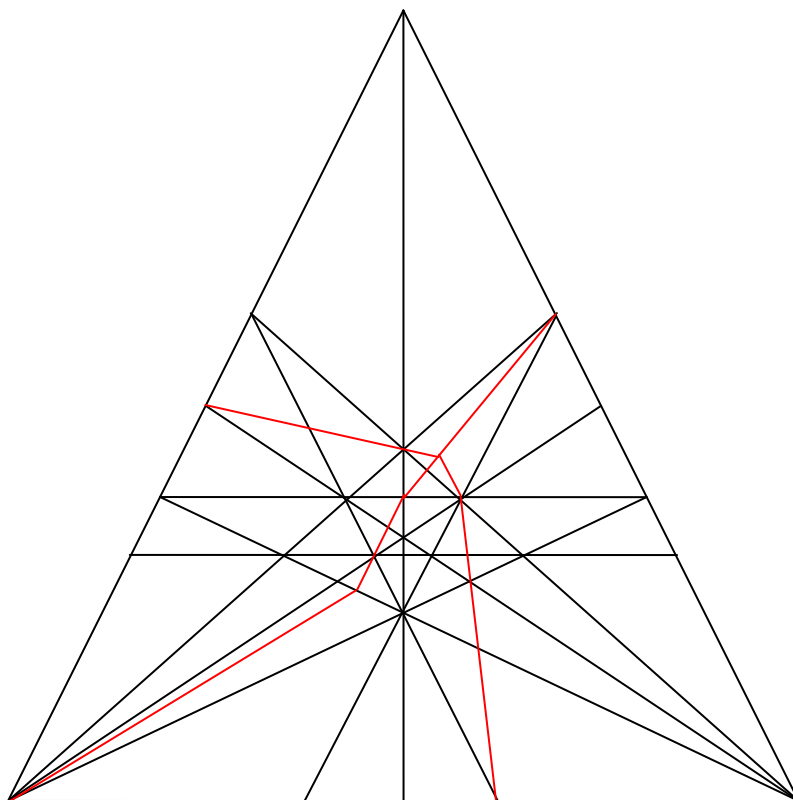


Рис. 11. Тройка $(m, T, P) = (13, 52, 14)$.

Построенная триангуляция обладает всеми нужными топологическими свойствами, только вот красные линии не только не прямые, но и неоднократно пересекаются с другими линиями, чего приличные прямые делать не умеют. К сожалению, не удалось выразить эти геометрические свойства прямых с помощью формул, поэтому и сократить список не удалось. Одна из красных линий имеет два пересечения ранга 2 подряд, что недопустимо, однако, это ограничение слишком слабое, так как на других линиях мало пересечений ранга 2.

Ответ. При $m = 14$.

Комментарии к решению

Кроме описанных, было опробовано довольно много других ограничений. Некоторые из них, совсем не похожие внешне, приводят к тому же списку оставшихся вариантов, другие оказались слабее. Удивительно, что не пригодились формулы максимального числа пересечений $m+3$ прямых и максимально возможного числа граней разбиения (не обязательно треугольных).

Разбиение треугольника девятью прямыми на 27 треугольных граней было найдено не сразу. Сначала я построил разбиение на 26 граней, но увидев, что это число выбивается из ряда, портит красивую закономерность, поискал получше. И нашёл. Тем крепче стала уверенность, что возможно и $T(13) = 51$, однако такую триангуляцию построить не удалось. Но я верю, что она существует. Аминь.