ММ200

Обозначим через $T(m)$ максимально возможное количество треугольников, на которые можно разрезать треугольник m прямыми. (Никаких других фигур, при разрезании возникать не должно.) При каком наименьшем m значение отношения $\frac{T(m)}{m}$ достигает 4?

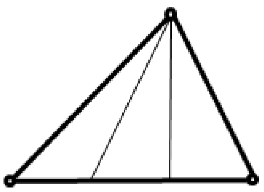
Решение.

Понятно, что $T(1) = 2$, $T(2) = 3$, $T(3) = 6$, но уже далее находить значения $T(m)$ не так легко, а при ещё больших значениях - очень трудно.

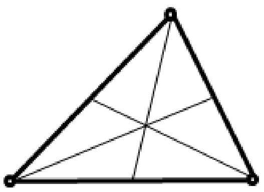
Поэтому рассмотрим разные схемы триангуляции и находим для них отношение числа тр-ков к кол-ву прямых. И можно попробовать найти наименьшее кол-во прямых, при котором данное отношение станет не менее 4.

Расмотрим некоторые простые варианты триангуляции, определим для них число получающихся тр-ков и соответствующие отношения.

n непересекающихся (внутри треугольника) прямых разбивают тр-ник на $n+1$ треугольник



Другой способ триангуляции - медианами:

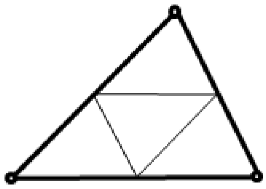
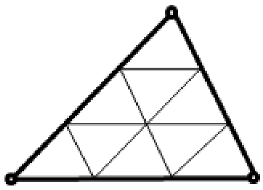
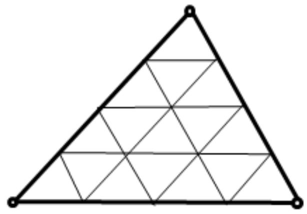


Количество треугольников в разбиении:

$$s = n + t + 1$$

Где t - количество пересечений прямых внутри тр-ка. Точки пересечения назовём узлами, кратность узла - количество пересекающихся *в нём прямых минус 1. Тогда t находим суммированием кратностей всех узлов.*

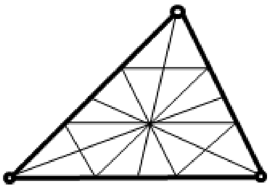
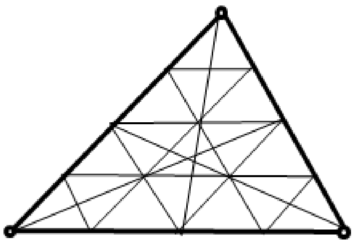
Теперь рассмотрим триангуляцию треугольника сетью прямых, параллельных сторонам треугольника:

Можно заметить, что при $n = 3k$ число треугольников равно $(k+1)^2$.

При этой схеме отношение превысит 4 при $k = 10$, т.е. $n = 30$, отношение равно $\frac{11^2}{30} = \frac{121}{30} > 4$.

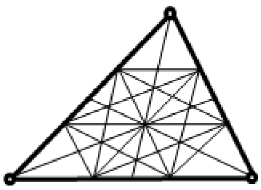
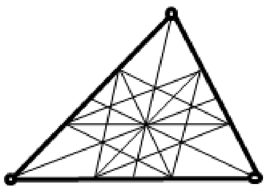
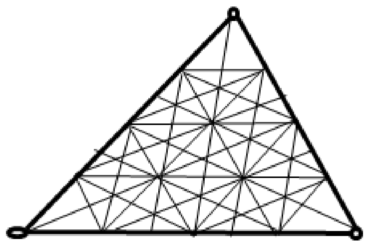
Уменьшить число прямых можно сочетая такую сеть и медианное разбиение:

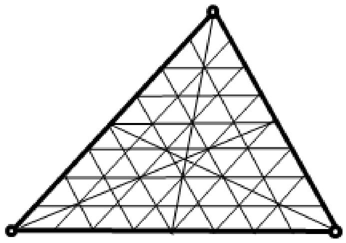
Можно найти соответствующую формулу для числа тр-ков $(k+1)^2 + k + 1$.

В такой схеме отношение превысит 4 при $k = 9$, т.е. $n = 27$, число треугольников при этой триангуляции составит 110.

Дальнейшего улучшения результата можно добиться при добавлении прямых, параллельных медианам или наоборот, удалении из некоторых схем прямых с малым числом пересечений, например:

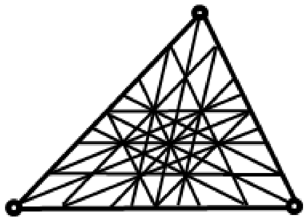




А самые интересные результаты такие



При $n = 21$ *получено ровно* 84 *треугольника, по всей видимости, это наименьшее* n *при котором отношение может в точности быть равно 4.*

А следующее разбиение



скорее всего, соответствует наименьшему возможному значению $n = 18$*, при этом число треугольников* 78*.*