О. Б. Полубасов   11.09.2015 г.

===========MM201===============

MM201 (3 балла)

Решения принимаются до 11.09.2015

Для каждого натурального *k* найти все возможные *n*, при которых множество *{1, 2,…, n}* можно разбить на классы так, что наибольший элемент в каждом классе ровно в *k* раз больше количества элементов класса.

Пусть множество {1, 2,…, n} разбито на m классов размером $X_1,\dots, X_m$.

Так как наибольшие элементы в классах различны и при этом должны быть в k раз больше количества элементов класса, то все классы имеют разные размеры. Будем считать, что $X_1 < X_2 < \dots < X_m$.

По условию, $X_m = \frac{n}{k}$, $\sum_{i=1}^{m} X_i = n$, следовательно, $\sum_{i=1}^{m-1} X_i = n - \frac{n}{k}$.

Для каждой двойки (n, k) количество A(n, k) требуемых разбиений множества из n неразличимых предметов на классы равно количеству представлений числа $n - \frac{n}{k}$ в виде суммы различных натуральных слагаемых, каждое из которых не превышает $\frac{n}{k} - 1$. То есть, $A(n, k) = \Phi(n - \frac{n}{k}, \frac{n}{k} - 1)$, где Φ(a, b) – количество представлений числа *a* в виде суммы различных натуральных слагаемых, не превышающих *b*. Конечно же, функция Φ всесторонне изучена в теории разбиений. В частности, для положительности Φ(a, b) необходимо $a \le b(b+1)/2$.

Отсюда: $n - n/k \le (n/k - 1)(n/k)/2$, то есть, $n \ge k(2k - 1)$.

Необходимость доказана, а достаточность докажем конструктивно.
Для заданного k положим $n = k(2k - 1)$, $m = 2k - 1$, $X_i = i$, $i = 1..m$.
Для каждого i поместим в класс i число ki и дополним класс до размера X_i меньшими числами. Получим один вариант заполнения класса 1, 2k-2 вариант заполнения класса 2, C(3k-4, 2) вариантов заполнения класса 3,.., C(ki – C(i, 2) – 1, i–1) вариантов заполнения класса i, считая выбранным заполнение классов с меньшими номерами.

Каждый раз, увеличивая размеры наибольших k классов на 1, а n – на k, опять будем получать решения. Не забудем в каждый класс помещать правильный наибольший элемент.

Ответ. Для каждого k возможны любые $n \ge k(2k - 1)$, кратные k.

Смежные вопросы.

Мы построили разбиение множества {1, 2,…, n} для допустимых значений n на m = 2k – 1 классов. А каковы возможные значения m в зависимости от k?

При k = 1 для любого натурального n разбиение состоит из одного класса.

Пусть k > 1.

Так как $X_m = \frac{n}{k}$ и $X_m > \frac{n}{m}$ (в классе m число элементов больше среднего), то $m \geq k + 1$.

Значение m = k + 1 достижимо. Для заданного k > 1 положим m = k + 1, $X_i = C(k, 2) + i – 1$, i = 1..m, n = kC(k+1, 2).

В то же время, сверху значение m не ограничено. Для k = 2 и произвольного $m \geq 3$ положим $X_i = i$, i = 1..m-1, $X_m = C(m, 2)$, $n = 2X_m$.

Пусть заданы k > 2 и $m \geq k + 2$. Для построения решения требуется выполнить всего два условия:

$\sum_{i=1}^{m-1} X_i$ кратно k – 1, (1)

$X_m = \frac{\sum_{i=1}^{m-1} X_i}{k-1} > X_{m-1}$. (2)

Ясно, что это можно сделать многими способами. Если мы хотим найти минимальное n для заданной пары (k, m), то (так как $n = kX_m$) необходимо минимизировать X_m, а значит, $\sum_{i=1}^{m-1} X_i$.

Если $m \geq 2k$, то условие (2) выполняется автоматически.
Положим $X_i = i$, i = 1..m-1. Пусть $\sum_{i=1}^{m-1} X_i = m(m – 1)/2 = h \bmod (k – 1)$. Если h = 0, то условие (1) выполнено. Иначе, увеличим $X_{m-k+h+1}..X_{m-1}$ на 1.

Если $k+2 \leq m \leq 2k–2$, то положим $X_i = d + i$, i = 1..m-1, где d выбирается из диапазона:

$(m(2k – m) – m – 2k + 2)/(2m – 2k) < d \leq (m(2k – m) – m)/(2m – 2k)$.

Пусть $\sum_{i=1}^{m-1} X_i = (m + 2d)(m – 1)/2 = h \bmod (k – 1)$. Если h = 0, то всё в порядке. Иначе, надо опробовать два варианта: увеличить на 1 (k – 1 – h) наибольших класса и увеличить на 1 (2k – 2 – h) наибольших класса.

Можно указать характерные точки графика.

m	наименьшее n
k + 1	$k^2(k+1)/2$
2k – 2, $k \geq 3$	$2k^2$
2k – 1	k(2k – 1)
jk – j, $j \geq 3$, jk кратно 2	jk(jk – j – 1)/2
jk – j + 1, $j \geq 3$, jk кратно 2	jk(jk – j + 1)/2

Таб. 1. Наименьшее n в зависимости от m.

m	k = 2	k = 3	k = 4	k = 5	k = 6	k = 7
3	6	-	-	-	-	-
4	12	18	-	-	-	-
5	20	15	40	-	-	-
6	30	24	32	75	-	-
7	42	33	28	60	126	-
8	56	42	40	50	84	196
9	72	54	48	45	72	126
10	90	69	60	60	72	105
11	110	84	76	70	66	98
12	132	99	88	85	84	98
13	156	117	104	100	96	91
14	182	138	124	115	114	112

Таб. 2. Наименьшее n в зависимости от k и m.

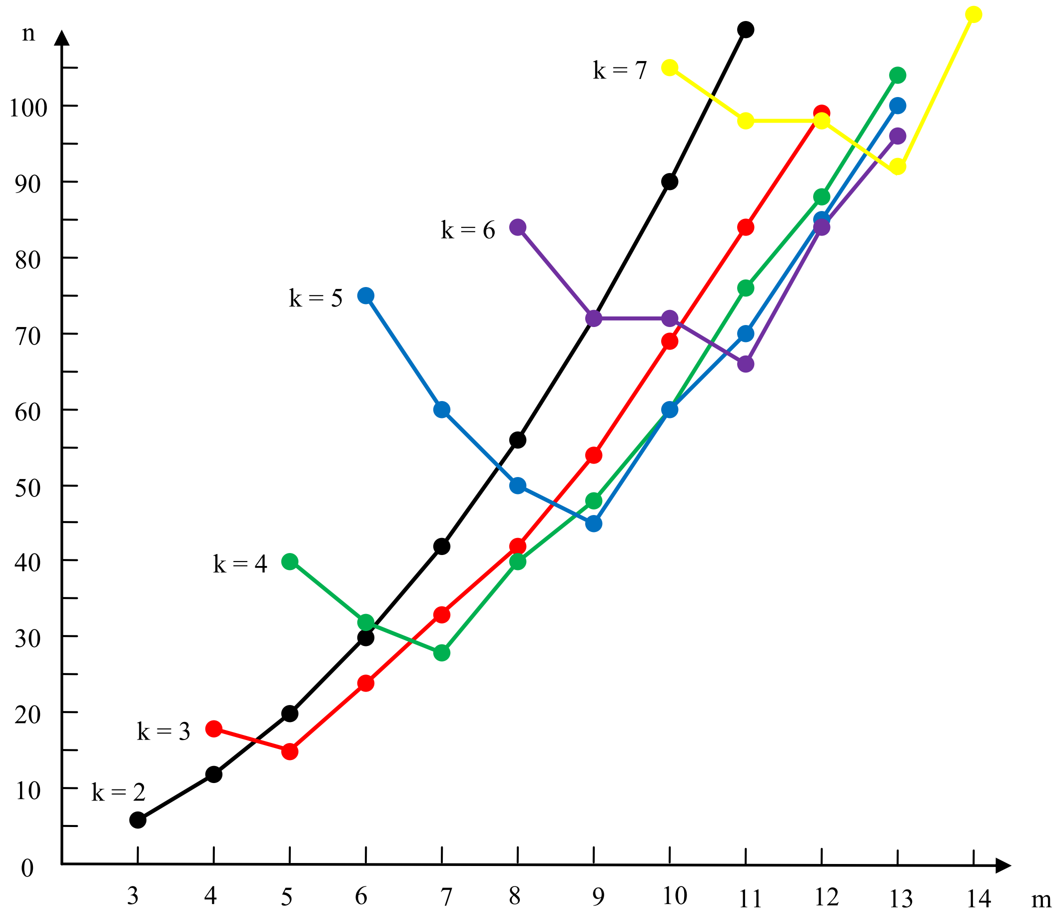

Рис. 1. Наименьшее n в зависимости от k и m.