О. Б. Полубасов   04.10.2015 г.

===========MM205===============

MM205 (7 баллов)

Решения принимаются до 9.10.2015

Вася выписывает в порядке возрастания натуральные числа, имеющие по 2016 натуральных делителей. На каком шаге он впервые выпишет число, не кратное 2016?

===============================

2016 = 7 * 3*3 * 2*2*2*2*2, поэтому наименьшее из чисел, имеющих ровно 2016 делителей, равно

$2^6 * 3^2 * 5^2 * 7 * 11 * 13 * 17 * 19 = 4\,655\,851\,200$,

а наименьшее из них, не кратное 2016, равно

$2^6 * 3 * 5^2 * 7^2 * 11 * 13 * 17 * 19 = 10\,863\,652\,800$.

Диапазон не велик. OK Google! Покажи все подходящие числа из этого диапазона!

1. $4\,655\,851\,200 = 2^6 * 3^2 * 5^2 * 7 * 11 * 13 * 17 * 19$
2. $5\,145\,940\,800 = 2^6 * 3^3 * 5^2 * 7^2 * 11 * 13 * 17$
3. $5\,636\,030\,400 = 2^6 * 3^2 * 5^2 * 7 * 11 * 13 * 17 * 23$
4. $5\,751\,345\,600 = 2^6 * 3^3 * 5^2 * 7^2 * 11 * 13 * 19$
5. $6\,299\,092\,800 = 2^6 * 3^2 * 5^2 * 7 * 11 * 13 * 19 * 23$
6. $6\,518\,191\,680 = 2^6 * 3^2 * 5 * 7^2 * 11 * 13 * 17 * 19$
7. $6\,616\,209\,600 = 2^6 * 3^5 * 5^2 * 7 * 11 * 13 * 17$
8. $6\,962\,155\,200 = 2^6 * 3^3 * 5^2 * 7^2 * 11 * 13 * 23$
9. $7\,106\,299\,200 = 2^6 * 3^2 * 5^2 * 7 * 11 * 13 * 17 * 29$
10. $7\,394\,587\,200 = 2^6 * 3^5 * 5^2 * 7 * 11 * 13 * 19$
11. $7\,520\,990\,400 = 2^6 * 3^3 * 5^2 * 7^2 * 11 * 17 * 19$
12. $7\,596\,388\,800 = 2^6 * 3^2 * 5^2 * 7 * 11 * 13 * 17 * 31$
13. $7\,890\,442\,560 = 2^6 * 3^2 * 5 * 7^2 * 11 * 13 * 17 * 23$
14. $7\,942\,334\,400 = 2^6 * 3^2 * 5^2 * 7 * 11 * 13 * 19 * 29$
15. $8\,086\,478\,400 = 2^6 * 3^3 * 5^2 * 7 * 11^2 * 13 * 17$
16. $8\,237\,275\,200 = 2^6 * 3^2 * 5^2 * 7 * 11 * 17 * 19 * 23$
17. $8\,490\,081\,600 = 2^6 * 3^2 * 5^2 * 7 * 11 * 13 * 19 * 31$
18. $8\,576\,568\,000 = 2^6 * 3^2 * 5^3 * 7^2 * 11 * 13 * 17$
19. $8\,778\,369\,600 = 2^6 * 3^3 * 5^2 * 7^2 * 11 * 13 * 29$
20. $8\,818\,729\,920 = 2^6 * 3^2 * 5 * 7^2 * 11 * 13 * 19 * 23$
21. $8\,888\,443\,200 = 2^6 * 3^3 * 5^2 * 7^2 * 13 * 17 * 19$
22. $8\,951\,342\,400 = 2^6 * 3^5 * 5^2 * 7 * 11 * 13 * 23$
23. $9\,037\,828\,800 = 2^6 * 3^3 * 5^2 * 7 * 11^2 * 13 * 19$

24. $9\,066\,657\,600 = 2^6 * 3^2 * 5^2 * 7 * 11 * 13 * 17 * 37$
25. $9\,104\,356\,800 = 2^6 * 3^3 * 5^2 * 7^2 * 11 * 17 * 23$
26. $9\,262\,693\,440 = 2^6 * 3^5 * 5 * 7^2 * 11 * 13 * 17$
27. $9\,383\,774\,400 = 2^6 * 3^3 * 5^2 * 7^2 * 11 * 13 * 31$
28. $9\,556\,747\,200 = 2^6 * 3^3 * 5^2 * 7 * 11 * 13^2 * 17$
29. $9\,585\,576\,000 = 2^6 * 3^2 * 5^3 * 7^2 * 11 * 13 * 19$
30. $9\,614\,404\,800 = 2^6 * 3^2 * 5^2 * 7 * 11 * 13 * 23 * 29$
31. $9\,669\,844\,800 = 2^6 * 3^5 * 5^2 * 7 * 11 * 17 * 19$
32. $9\,734\,961\,600 = 2^6 * 3^2 * 5^2 * 7 * 13 * 17 * 19 * 23$
33. $9\,924\,314\,400 = 3^6 * 2^5 * 5^2 * 7 * 11 * 13 * 17$
34. $9\,948\,818\,880 = 2^6 * 3^2 * 5 * 7^2 * 11 * 13 * 17 * 29$
35. $10\,046\,836\,800 = 2^6 * 3^2 * 5^2 * 7 * 11 * 13 * 17 * 41$
36. $10\,133\,323\,200 = 2^6 * 3^2 * 5^2 * 7 * 11 * 13 * 19 * 37$
37. $10\,175\,457\,600 = 2^6 * 3^3 * 5^2 * 7^2 * 11 * 19 * 23$
38. $10\,242\,872\,640 = 2^6 * 3^2 * 5 * 7 * 11^2 * 13 * 17 * 19$
39. $10\,277\,467\,200 = 2^6 * 3^2 * 5^2 * 7 * 11 * 13 * 23 * 31$
40. $10\,352\,422\,080 = 2^6 * 3^5 * 5 * 7^2 * 11 * 13 * 19$
41. $10\,386\,129\,600 = 2^6 * 3^2 * 5^2 * 7 * 11 * 17 * 19 * 29$
42. $10\,536\,926\,400 = 2^6 * 3^2 * 5^2 * 7 * 11 * 13 * 17 * 43$
43. $10\,634\,944\,320 = 2^6 * 3^2 * 5 * 7^2 * 11 * 13 * 17 * 31$
44. $10\,681\,070\,400 = 2^6 * 3^3 * 5^2 * 7 * 11 * 13^2 * 19$
45. $10\,759\,694\,400 = 2^6 * 3^3 * 5^2 * 7^2 * 13 * 17 * 23$
46. $10\,863\,652\,800 = 2^6 * 3 * 5^2 * 7^2 * 11 * 13 * 17 * 19$

Ответ. Число 10 863 652 800 будет выписано на 46 шаге.

Смежные вопросы.

Может создаться впечатление, что большая часть чисел, имеющих ровно n делителей, делится на n. Однако, всё как раз наоборот, доля этих чисел пренебрежимо мала, а во многих случаях количество таких чисел, вообще, конечно. Для примера, рассмотрим n = 2015.

2015 = 31 * 13 * 5, поэтому все числа, имеющие ровно по 2015 делителей, представляются одним из следующих способов.

$a^{30} * b^{12} * c^4$,
$a^{64} * b^{30}$,
$a^{154} * b^{12}$,
$a^{402} * b^4$,
a^{2014},

где a, b и c – различные простые числа.

Наименьшее из чисел, имеющих ровно 2015 делителей, равно

$2^{30} * 3^{12} * 5^4 = 356\,644\,017\,930\,240\,000$. Легко видеть, что оно не кратно 2015.

Поскольку число 2015, в отличие от 2016, свободно от квадратов и имеет ровно 3 различных простых делителя, то существуют всего 3! = 6 чисел, имеющих ровно 2015 делителей и при этом кратных 2015.

$5^{30} * 13^{12} * 31^{4}$ = 200385887831438105562701821327209472656 25,
$5^{30} * 13^{4} * 31^{12}$ = 209514394102476255259672179818153381347656 25,
$5^{12} * 13^{30} * 31^{4}$ = 5907277824265724657606462987796411732248535156 25,
$5^{4} * 13^{30} * 31^{12}$ = 12897956638694930399446094667694720319525470886570556 25,
$5^{12} * 13^{4} * 31^{30}$ = 38394080956053611880503290035358106157651340417385253906 25,
$5^{4} * 13^{12} * 31^{30}$ = 80177232231459794262879013435941845578689197018342692105506 25.

Наименьшее из этих чисел имеет номер 292983 в возрастающей последовательности чисел, имеющих ровно по 2015 делителей.

Не верно, что свойством конечности интересующих множеств чисел обладают только числа, свободные от квадратов. Кроме них, этим свойством обладает и n = 4. Существует единственное число, имеющее ровно 4 делителя, и при этом делящееся на 4, это число 2^3 = 8. Последовательности чисел, свободных от квадратов, но с добавлением числа 4, в OEIS нет.