MM205.

Вася выписывает в порядке возрастания натуральные числа, имеющие по 2016 натуральных делителей. На каком шаге он впервые выпишет число, не кратное 2016?

Решение.

Каноническое разложение числа 2016:

$$2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$$

Пусть N натуральное число, имеющее 2016 натуральных делителей, тогда

$$N = p_1^{d_1} \cdot p_2^{d_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{d_k}$$

где p_i - простые числа, а

$$(d_1 + 1) \cdot (d_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (d_k + 1) = 2016$$

Перебором находим такие числа (наименьшие). Для удобства работы - логарифмируем

$$lg\,N \;=\; d_1 \cdot lg\,p_1 \;+\; d_2 \cdot lg\,p_2 \;+\; \ldots \;+\; d_k \cdot lg\,p_k$$

Просматриваем различные произведения, равные 2016. Вот некоторые из них (большие степени нет смысла рассматривать):
1) $7 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2016$
2) $7 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2016$
3) $7 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2016$
4) $9 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2016$
5) $8 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 2016$
6) $7 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 = 2016$
7) $7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 2016$
8) $7 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2016$
9) $7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 = 2016$
10) $7 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2 = 2016$ *и т.д.*
Схема 1 самая перспективная для поиска наименьших чисел.

Наименьшее натуральное число, имеющее 2016 *натуральных делителей:*

$$N_1 = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$$
$$\lg N_1 = 9,668$$

Также среди чисел этого типа найдём число, не кратное 2016. *У такого числа или степень* 2 *должна быть меньше* 5, *или* 3 *может входить только в первой степени или нет делителя* 7. *Имеем* 3 *кандидата, вычислим*

$$\lg \left(2^2 \cdot 3^6 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19\right) = 10,372$$
$$\lg \left(2^6 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19\right) = 10,036$$
$$\lg \left(2^6 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23\right) = 10,185$$

Итак, меньшее число, имеющее 2016 *натуральных делителей и не кратное* 2016

$$N_k = 2^6 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$$

Пока это только предположение (что это наименьшее из таких чисел). Теперь перебором проверяем числа из указанных схем - меняя набор простых чисел и степени для одного и того же набора. Впрочем, из 10 указанных схем остаются только 3 первые, т.к. логарифмы наименьших чисел остальных схем больше $10,036$*, т.е. не подходят.*

Составим таблицу чисел, имеющих по 2016 *натуральных делителей начиная с наименьших в порядке возрастания.*

k	2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	lg N_k
1	6	2	2	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	9,668
2	6	3	2	2	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	9,71146
3	6	2	2	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	9,75097
4	6	3	2	2	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	9,75977
5	6	2	2	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	9,79928
6	6	2	1	2	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	9,81413
7	6	5	2	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	9,82061
8	6	3	2	2	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	9,84274
9	6	2	2	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	9,85164
10	6	5	2	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	9,86891
11	6	3	2	2	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	9,87628
12	6	2	2	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	9,88061
13	6	2	1	2	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	9,8971
14	6	2	2	1	1	1	0	1	0	1	0	0	0	0	9,89995
15	6	3	2	1	2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	9,90776
16	6	2	2	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	9,91578
17	6	2	2	1	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	9,92891
18	6	2	3	2	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	9,93331
19	6	3	2	2	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	9,94341
20	6	2	1	2	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	9,94541
21	6	3	2	2	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	9,94883
22	6	5	2	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	9,95189
23	6	3	2	1	2	1	0	1	0	0	0	0	0	0	9,95606
24	6	2	2	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	9,95745
25	6	3	2	2	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	9,95925
26	6	5	1	2	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	9,96674
27	6	3	2	2	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	9,97238
28	6	3	2	1	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	9,98031
29	6	2	3	2	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	9,98162
30	6	2	2	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	9,98292
31	6	5	2	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	9,98542
32	6	5	2	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	9,98542
33	6	2	2	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	9,98833
34	5	6	2	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	9,9967
35	6	2	1	2	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	9,99777
36	6	2	2	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	10,002
37	6	2	2	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	10,0058
38	6	3	2	2	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	10,0076
39	6	2	1	1	2	1	1	1	0	0	0	0	0	0	10,0104
40	6	2	2	1	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	10,0119
41	6	5	1	2	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	10,015
42	6	2	2	1	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	10,0165
43	6	2	2	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	10,0227
44	6	2	1	2	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	10,0267
45	6	3	2	1	1	2	0	1	0	0	0	0	0	0	10,0286
46	6	3	2	2	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	10,0318
47	6	1	2	2	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	10,036

Итак, искомое число встретится под номером 47.

Само это число равно

$$2^6 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 = 10\,863\,652\,800$$