О. Б. Полубасов 06.11.2015 г.

===========ММ207===============

ММ207 (13 баллов)

Решения принимаются до 6.11.2015

Обозначим через *A(a, d)* максимально возможное количество последовательных натуральных чисел таких, что первое из них имеет ровно a натуральных делителей, второе – $a + d$, третье – $a + 2d$ и т.д. (иными словами, количества делителей последовательных чисел образуют арифметическую прогрессию с первым членом *a* и знаменателем *d*).

1) найти наибольшее возможное значение *A(n, 1)*;
2) найти наибольшее возможное значение *A(n, 3)*;
3) найти *A(2, 2)*;
4) найти *A(4, 2)*;
5) доказать, что при подходящем *n*: $A(n, 2) \geq 8$.

===============================

Чтобы избежать путаницы, будем говорить «*последовательность*», имея в виду последовательные числа, и «*прогрессия*», имея в виду количество делителей. Через X_Y обозначим член *последовательности*, имеющий ровно Y делителей.

1. Поскольку нечётное количество делителей имеют только квадраты, а два квадрата не могут отстоять на 2, то *прогрессия* содержит не более одного нечётного числа, то есть, $A(n, 1) \leq 3$. Пример подобрался быстро.

$X_8 = 27285093123 = 3 * 55061 * 165181$.
$X_9 = 27285093124 = 2^2 * 82591^2$.
$X_{10} = 27285093125 = 5^4 * 43656149$.

2. Аналогично, A(n, 3) = 3.

$X_{24} = 1137387900933123 = 3 * 7^2 * 229423 * 33725183$.
$X_{27} = 1137387900933124 = 2^2 * 223^2 * 75617^2$.
$X_{30} = 1137387900933125 = 5^4 * 17^2 * 6296957237$.

Вообще, можно (голословно) предположить, что A(n, k) = 3 для любых нечётных k. Слишком уж большая свобода в выборе *последовательности*.

3. *Последовательность* (2, 2) начинается с числа X_2, X_2 – простое, X_4 – удвоенное простое, тогда X_8 кратно 4, а значит, и 8. В то же время, $X_6 = 3 \mod 6$. Таким образом, на 5 делиться может только X_{10} (кроме конечного числа вариантов). Выпишем возможные представления членов *последовательности*, дающие нужные остатки от деления на 5, 6, 8 и 9 (таб. 1).

№	Член	Число делителей	mod 5	mod 6	mod 8	mod 9	Возможные представления
1	X_2	2	1	1	5	7	a
2	X_4	4 = 2*2	2	2	6	8	2b
3	X_6	6 = 3*2	3	3	7	0	9c
4	X_8	8 = 2*2*2	4	4	0	1	8d
5	X_{10}	10 = 5*2	0	5	1	2	625e
6	X_{12}	12 = 3*2*2	1	0	2	3	-

Таб. 1 Возможные представления членов последовательности (2, 2), a-e – различные простые числа.

Для первых пяти членов *последовательности* оказалось возможным только по одному представлению, а для шестого члена подходящих представлений не нашлось вовсе: X_{12} должен быть кратен 6, но не кратен 4 и 9, а значит, имеет вид $6f^2$, где f – простое. Но тогда X_{12} mod 8 = 6, а не 2. Поэтому $A(2, 2) \leq 5$.

Система линейных диофантовых уравнений, представленная в таб. 1, имеет бесконечно много решений в натуральных числах. Не видно никаких причин, мешающих ей иметь бесконечно много решений в простых числах. Наверняка, соответствующая теорема о свойствах систем линейных диофантовых уравнений давно кем-нибудь доказана.

Решая систему, получаем:

$X_2 = 625 * 41 – 4 + 625 * 8 * 9z$, $z \geq 0$. Наименьшие числа такие.

$X_2 = 1524085621 = 1524085621$.
$X_4 = 1524085622 = 2 * 762042811$.
$X_6 = 1524085623 = 3^2 * 169342847$.
$X_8 = 1524085624 = 2^3 * 190510703$.
$X_{10} = 1524085625 = 5^4 * 2438537$.

4. Предположим, что в *последовательности* (4, 2) член X_4 нечётный. Тогда X_6 и X_{10} чётны. Тогда они не кратны 3, следовательно, трём кратно X_8. Тогда X_6 не кратно 4 и равно 2 mod 8, а X_{10} кратно 4 и равно 0 mod 8. Противоречие. Следовательно, X_4 чётно, но не кратно 4, и для *последовательности* (4, 2) действуют все рассуждения предыдущего пункта. Поэтому A(4, 2) = 4. Наименьшие числа оказались такими.

$X_4 = 2545622 = 2 * 1272811$.
$X_6 = 2545623 = 3^2 * 282847$.
$X_8 = 2545624 = 2^3 * 318203$.
$X_{10} = 2545625 = 5^4 * 4073$.

5. Чтобы доказать, что существуют n, для которых A(n, 2) ≥ 8, достаточно предъявить пример.

$X_6 = 423515296144578121 = 11^2 * 3500126414418001$
$X_8 = 423515296144578122 = 2 * 1747619 * 121169229719$
$X_{10} = 423515296144578123 = 3^4 * 5228583903019483$
$X_{12} = 423515296144578124 = 2^2 * 1048609 * 100970737459$
$X_{14} = 423515296144578125 = 5^6 * 27104978953253$
$X_{16} = 423515296144578126 = 2 * 3 * 61 * 1157145617881361$
$X_{18} = 423515296144578127 = 7^2 * 17^2 * 29907160239007$
$X_{20} = 423515296144578128 = 2^4 * 23 * 1150856783001571$

Поиск решений производился по схеме, представленной в таб. 2.

№	Член	Число делителей	mod 5^6	mod 2^4	mod 3^4	mod 7^2	mod 11^2	mod 17^2	Возможные представления
1	X_6	6 = 3*2					0		11^2a
2	X_8	8 = 2*2*2					1		2bc
3	X_{10}	10 = 5*2			0		2		3^4d
4	X_{12}	12 = 3*2*2			1		3		2^2ef
5	X_{14}	14 = 7*2	0	-3	2	-2	4	-2	5^6g
6	X_{16}	16=2*2*2*2	1	-2	3	-1	5	-1	6hi
7	X_{18}	18 = 3*3*2	2	-1	4	0	6	0	$7^2 17^2 j$
8	X_{20}	20 = 5*2*2	3	0	5	1	7	1	2^4km
9	X_{22}	22 = 11*2	4	1	6	2	8	2	-

Таб. 2. Одна из схем представления членов *последовательности* (6, 2), a-m – различные простые числа.

Решения системы по этой схеме имеют вид:
$X_6 = 5^6 * 1684809173 – 4 + 5^6 * 2^4 * 3^4 * 7^2 * 11^2 * 17^2 z,\ z \geq 0.$

Это не единственная, и не самая длинная схема для *последовательности* (6, 2). Максимальная длина схемы равна 10 (таб. 3), поэтому 8 ≤ A(6, 2) ≤ 10.

№	Член	Число делителей	mod 6	mod 2^4	mod 3^6	Возможные представления
1	X_6	6 = 3*2	5	9	-4	ab^2
2	X_8	8 = 2*2*2	0	10	-3	6c
3	X_{10}	10 = 5*2	1	11	-2	d^4e
4	X_{12}	12 = 3*2*2	2	12	-1	2^2fg
5	X_{14}	14 = 7*2	3	13	0	3^6h
6	X_{16}	16 = 2*2*2*2	4	14	1	2ijk
7	X_{18}	18 = 3*3*2	5	15	2	m^2n^2o
8	X_{20}	20 = 5*2*2	0	0	3	$2^4 3p$
9	X_{22}	22 = 11*2	1	1	4	$r^{10}s$
10	X_{24}	24 = 3*2*2*2	2	2	5	$2t^2uv$
11	X_{26}	26 = 13*2	3	3	6	-

Таб. 3. Схема представления членов *последовательности* (6, 2) длиной 10, a-v – различные простые числа.

Структура таблицы 3 позволяет построить систему линейных диофантовых уравнений, так же как и для таблицы 1, поэтому я твёрдо убеждён, что *последовательности* (6, 2) длины 10 существуют. Скорее всего, требующиеся числа очень велики, и найти их не так-то просто, но они есть, более того, их бесконечно много.

6. Попытаемся выяснить, ограничена ли функция A(n, 2) сверху. Рассмотрим 17 последовательных значений X.

X =	A				B				C				D				E
макс. степень 2 в разложении X	-		1		3		1		2		1		≥4		1		-
делители Y(X)			2		4		2		3		2		≥5		2		

Так как C кратно 2^2, но не кратно 2^3, Y(C) должно делиться на 3. Одно из чисел B или D (пусть B) кратно 2^3, но не кратно 2^4, поэтому Y(B) должно делиться на 3. Распространим делители Y(X) влево и вправо с соответствующим шагом.

X =	A				B				C				D				E
макс. степень 2 в разложении X	-		1		3		1		2		1		≥4		1		-
делители Y(X)	4	2	3,4	2	4	2,3	4	2	3,4	2	4	2,3	4,≥5	2	3,4	2	4

Или, переставляя B и D:

X =	A				B				C				D				E
макс. степень 2 в разложении X	-		1		≥4		1		2		1		3		1		-
делители Y(X)	4	2	3,4	2	4,≥5	2,3	4	2	3,4	2	4	2,3	4	2	3,4	2	4

Так как A кратно 2^2, но не кратно 2^3, то Y(A) должно делиться на 3. Но не делится, следовательно, число A не входит в *последовательность*. То же касается и числа E. Таким образом, длина *последовательности* не может превышать 15.

Теперь рассмотрим 19 последовательных значений X.

X =	F			G			H			I			K			L			M
макс. степень 3 в разложении x	-			2			1			1			≥2			1			-
делители Y(X)	2			3			2			4			≥3			2			2

Одно из чисел G или K (пусть G), или оба, кратно 3^2, но не кратно 3^3, поэтому Y(G) должно делиться на 3.

Как Y(H), так и Y(I) чётны, но ровно одно из них кратно 4. Предположим, что Y(I) не кратно 4. Тогда Y(I) = 2(2m + 1), а значит, I = $3z^{2m}$. Тогда I mod 9 = 3. Но I mod 9 = 6. Противоречие. Следовательно, Y(I) кратно 4.

Распространим делители Y(X) влево и вправо с соответствующим шагом.

X =	F			G			H			I			K			L			M
макс. степень 3 в разложении x	-			2			1			1			≥2			1			-
делители Y(X)	2,3	4	2	3,4	2	4	2,3	4	2	3,4	2	4	2,3	4	2	3,4	2	4	2,3

Другой вариант:

X =	F			G			H			I			K			L			M
макс. степень 3 в разложении x	-			≥2			1			1			2			1			-
делители Y(X)	2,3	4	2	3,4	2	4	2,3	4	2	3,4	2	4	2,3	4	2	3,4	2	4	2,3

Так как Y(F) и k(H) не кратны 4, то Y(F) = 2(2k + 1), F = $3y^{2k}$, Y(H) = 2(2m + 1), H = $3z^{2m}$.

Тогда H – F = $3(z^{2m} – y^{2k}) = 3(z^m – y^k)(z^m + y^k)$. Но H – F = 6. Противоречие. следовательно, число F не входит в *последовательность*. То же касается и числа M.

Теперь попытаемся совместить обе последовательности. При совмещении необходимо учитывать делители Y(X), а также тот факт, что H = $3z^{2m}$. а значит, H mod 8 = 3. Если H входит в *последовательность*, то длина *последовательности* не может превышать 11.

X =			H	C		I		D	K		
макс. степень 2 в разложении X		1		2		1		≥3		1	
макс. степень 3 в разложении x			1			1			≥4		
делители Y(X)	2,3	4	2	3,4	2	4	2,3	4	2	3,4	2
X mod 8	1	2	3	4	5	6	7	0	1	2	3
X mod 9	1	2	3	4	5	6	7	8	0	1	2

Таб. 4 Характеристики *последовательности* (n, 2) длины 11 при наличии члена H = $3z^{2m}$.

Заметим, что если Y(I) не кратно 8, то I = $6y^{2k}$. Так как I – H = 3, то $2y^{2k} – z^{2m} = 1$.

Если же H не входит в *последовательность*, то длина *последовательности* тоже не превышает 11.

Поскольку вместе с H из *последовательности* ушло и G, а K может делиться не только на 9, но и на большие степени тройки, то Y(K) теперь не обязано делиться на 3.

X =			I			K			L		
макс. степень 3 в разложении x			1			≥2			1		
делители Y(X)	4	2	4	2	4	2	4	2	4	2	4

Возможны всего два способа совмещения (не считая симметрии между B и D), получающих *последовательность* длины 11.

X =			B = I			K	C		L		D
макс. степень 2 в разложении X	1		3		1		2		1		≥4
макс. степень 3 в разложении x			1			≥2			1		
делители Y(X)	3,4	2	16	2,3	4	2	3,8	2	4	2,3	16
X mod 8	6	7	0	1	2	3	4	5	6	7	0
X mod 9	4	5	6	7	8	0	1	2	3	4	5

Таб. 5 Характеристики *последовательности* (n, 2) длины 11.

Уравнение L не линейно: $L = 6z^{2m}$. Поэтому Y(I) должно быть кратно 16, так как иначе: $I = 24y^{2k}$. Поскольку $L – I = 6$, то $z^{2m} – 4y^{2k} = 1$, что невозможно.

При втором способе совмещения все уравнения можно сделать линейными.

X =	B		I		C	K			D = L		
макс. степень 2 в разложении X	3		1		2		1		≥4		1
макс. степень 3 в разложении x			1			≥2			1		
делители Y(X)	4	2,3	8	2	3,4	2	8	2,3	4	2	3,8
X mod 8	0	1	2	3	4	5	6	7	0	1	2
X mod 9	4	5	6	7	8	0	1	2	3	4	5

Таб. 6. Характеристики другого варианта *последовательности* (n, 2) длины 11.

Так как структура таблицы 6 (но не таб. 4, 5) позволяет построить систему линейных диофантовых уравнений, так же как и для таблицы 1, я твёрдо убеждён, что *последовательности* (n, 2) длины 11 существуют. Скорее всего, требующиеся числа очень велики, и найти их не так-то просто, но они есть, более того, их бесконечно много.

При других способах совмещения длина *последовательности* уменьшается, но так как задано искать решения длины 8, нас могут интересовать также характеристики *последовательностей* длины 10 и 8.

X =		I		B	K			C = L		
макс. степень 2 в разложении X		1		≥3		1		2		1
макс. степень 3 в разложении x		1			≥2			1		
делители Y(X)	2	3,8	2	4	2,3	8	2	3,4	2	8
X mod 8	5	6	7	0	1	2	3	4	5	6
X mod 9	5	6	7	8	0	1	2	3	4	5

Таб. 7 Характеристики *последовательности* (n, 2) длины 10.

X =			C = I			K	D		L	
макс. степень 2 в разложении X	1		2		1		≥3		1	
макс. степень 3 в разложении x			1			≥2			1	
делители Y(X)	8	2	3,4	2	8	2,3	4	2	3,8	
X mod 8	2	3	4	5	6	7	0	1	2	3
X mod 9	4	5	6	7	8	0	1	2	3	4

Таб. 8. Характеристики другого варианта *последовательности* (n, 2) длины 10.

X =			K	B		L		C
макс. степень 2 в разложении X		1		≥3		1		2
макс. степень 3 в разложении x			≥2			1		
делители Y(X)	2	3,8	2	4	2,3	8	2	3,4
X mod 8	5	6	7	0	1	2	3	4
X mod 9	7	8	0	1	2	3	4	5

Таб. 9 Характеристики *последовательности* (n, 2) длины 8.

X =	C		I		D	K		
макс. степень 2 в разложении X	2		1		≥3		1	
макс. степень 3 в разложении x			1			≥2		
делители Y(X)	3,4	2	8	2,3	4	2	3,8	2
X mod 8	4	5	6	7	0	1	2	3
X mod 9	4	5	6	7	8	0	1	2

Таб. 10. Характеристики другого варианта *последовательности* (n, 2) длины 8.

Ответ.

Наибольшее возможное значение A(n, 1) = 3.
Наибольшее возможное значение A(n, 3) = 3.
A(2, 2) = 5.
A(4, 2) = 4.
Существуют n, для которых A(n, 2) ≥ 8, например, для n = 6.
Для любых n: A(n, 2) ≤ 11.

Из анализа таблиц можно извлечь некоторые любопытные факты, например:
Если A(n, 2) ≥ 8, то n mod 9 ≠ 0.
Если A(n, 2) ≥ 8, то X_n mod 9 ≠ 0, X_n mod 9 ≠ 8.

Обобщение

Итак, A(n, d) оказалось не больше 3, если d нечётно, и не больше 11, если d = 2. В *последовательности* X_Y количество составных чисел подряд конечно, рано или поздно встретится простое число, имеющее только два делителя. Поэтому любая возрастающая последовательность Y конечна, но существуют ли сколь угодно большие A(n, d)?

Рассмотрение отрицательных d ничего нового в задачу не привносит, поэтому ограничимся чётными положительными d.

Возьмём любое число m. Каждый 2^m–й член *последовательности* X_Y кратен 2^{m-1}, но не кратен 2^m. Тогда Y должен быть кратен m. То есть, каждый 2^m–й член *прогрессии* должен быть кратен m, что невозможно, если $2^m d$ не кратно m. Следовательно, длина любой *арифметической прогрессии* Y ограничена значением $2^{m+1} - 1$.

В формулировке задачи разность с какой-то целью названа знаменателем. Не намёк ли это, что следует рассмотреть *геометрические прогрессии* Y, может быть, среди них есть неограниченные?

Пусть G(a, d) – максимальная длина *геометрической прогрессии* с первым членом a и знаменателем d. Здесь дела обстоят ещё хуже: если ad не кратно простому m, то G(a, d) не превышает $2^m - 1$. Например, $G(2, 2) \leq 7$.

Рассмотрим последовательность факториалов, начиная от a!, где $a \geq 2$. Чтобы избежать путаницы, назовём её «*последовательностью факториалов*». Существуют ли последовательные числа X_Y, количества делителей которых образуют *последовательность факториалов* сколь угодно большой длины F(a)?

А вот это может оказаться правдой, так как, начиная с некоторого момента, все Y будут кратны любому наперёд заданному числу.