

=====MM208=====

MM208 (7 баллов)

От двух до пяти.

Решения принимаются до 13.11.2015

Найти наименьшее натуральное число, представимое в виде суммы пяти натуральных слагаемых не менее чем четырьмя способами, таким образом, что любые три слагаемых взаимно просты, а любые два не взаимно просты.

=====

Если в задаче MM206 требовались длинные числа, то в MM208 можно обойтись даже 16-битными. Разительный контраст.

Ответ.

$$\begin{aligned}44813 &= 12155 + 11362 + 10005 + 6902 + 4389, \\44813 &= 12818 + 11165 + 9867 + 6118 + 4845, \\44813 &= 14326 + 11165 + 7293 + 6555 + 5474, \\44813 &= 14858 + 9867 + 8265 + 6545 + 5278.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}12155 &= 5 * 11 * 13 * 17, \\11362 &= 2 * 13 * 19 * 23, \\10005 &= 3 * 5 * 23 * 29, \\6902 &= 2 * 7 * 17 * 29, \\4389 &= 3 * 7 * 11 * 19.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}12818 &= 2 * 13 * 17 * 29, \\11165 &= 5 * 7 * 11 * 29, \\9867 &= 3 * 11 * 13 * 23, \\6118 &= 2 * 7 * 19 * 23, \\4845 &= 3 * 5 * 17 * 19.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}14326 &= 2 * 13 * 19 * 29, \\11165 &= 5 * 7 * 11 * 29, \\7293 &= 3 * 11 * 13 * 17, \\6555 &= 3 * 5 * 19 * 23, \\5474 &= 2 * 7 * 17 * 23.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}14858 &= 2 * 17 * 19 * 23, \\9867 &= 3 * 11 * 13 * 23, \\8265 &= 3 * 5 * 19 * 29, \\6545 &= 5 * 7 * 11 * 17, \\5278 &= 2 * 7 * 13 * 29.\end{aligned}$$

Теперь решение. Сразу обобщим задачу.

Найти наименьшее натуральное число, представимое в виде суммы $N \geq 3$ натуральных слагаемых не менее чем $M \geq 1$ способами, таким образом, что любые два слагаемых не взаимно просты, а любые три взаимно просты.

Сначала решим подзадачу. Найти N таких натуральных чисел (будем называть их «*слагаемыми*»), что любые два из них не взаимно просты, а любые три взаимно просты.

Для решения подзадачи выберем $C(N, 2)$ попарных наибольших общих делителей слагаемых – попарно взаимно простых числа, больших 1.

Домножим каждое из слагаемых на произвольное число, взаимно простое с остальными слагаемыми (в том числе, на 1).

Чтобы избежать дублирования, примем, что $W_1 > W_2 > \dots > W_N$, где W_i – i -е слагаемое.

И всё. Осталось только подсчитать совпадения сумм. Поскольку суммы ожидаются весьма небольшими, никакого труда это не составляет.

$N = 5$.

$$42207 = 10005 + 8602 + 8151 + 7735 + 7714.$$

$$43035 = 10353 + 10166 + 8855 + 8151 + 5510,$$

$$43035 = 12441 + 8398 + 8211 + 7315 + 6670.$$

$$44169 = 11362 + 10846 + 10005 + 7315 + 4641,$$

$$44169 = 12818 + 10005 + 9614 + 6545 + 5187,$$

$$44169 = 14674 + 8398 + 7917 + 7315 + 5865.$$

$$44813 = 12155 + 11362 + 10005 + 6902 + 4389,$$

$$44813 = 12818 + 11165 + 9867 + 6118 + 4845,$$

$$44813 = 14326 + 11165 + 7293 + 6555 + 5474,$$

$$44813 = 14858 + 9867 + 8265 + 6545 + 5278.$$

$$48437 = 12765 + 10659 + 10166 + 9842 + 5005,$$

$$48437 = 13685 + 12597 + 8547 + 7030 + 6578,$$

$$48437 = 15295 + 9867 + 9435 + 7106 + 6734,$$

$$48437 = 17391 + 11305 + 9614 + 5642 + 4485,$$

$$48437 = 20995 + 9177 + 6902 + 6578 + 4785.$$

$$49025 = 12958 + 12818 + 8645 + 7905 + 6699,$$

$$49025 = 13702 + 12122 + 8645 + 7395 + 7161,$$

$$49025 = 14421 + 10465 + 9842 + 9435 + 4862,$$

$$49025 = 15466 + 10166 + 9435 + 8645 + 5313,$$

$$49025 = 15873 + 10465 + 9614 + 6783 + 6290,$$

$$49025 = 16354 + 9614 + 8645 + 8547 + 5865,$$

$$49025 = 17043 + 13685 + 7161 + 7106 + 4030.$$

N = 4.

$$718 = 231 + 195 + 182 + 110.$$

$$828 = 231 + 220 + 195 + 182,$$

$$828 = 385 + 195 + 182 + 66.$$

$$852 = 273 + 260 + 165 + 154,$$

$$852 = 286 + 231 + 195 + 140,$$

$$852 = 455 + 165 + 154 + 78.$$

$$1118 = 345 + 322 + 231 + 220,$$

$$1118 = 385 + 286 + 252 + 195,$$

$$1118 = 385 + 345 + 322 + 66,$$

$$1118 = 429 + 364 + 220 + 105,$$

$$1118 = 595 + 204 + 165 + 154.$$

Продолжать так можно долго...

$$1524 = 429 + 374 + 364 + 357,$$

$$1524 = 455 + 429 + 420 + 220,$$

$$1524 = 455 + 442 + 357 + 270,$$

$$1524 = 506 + 483 + 385 + 150,$$

$$1524 = 520 + 476 + 273 + 255,$$

$$1524 = 555 + 518 + 231 + 220,$$

$$1524 = 555 + 518 + 385 + 66,$$

$$1524 = 561 + 340 + 315 + 308,$$

$$1524 = 585 + 442 + 357 + 140,$$

$$1524 = 595 + 561 + 308 + 60,$$

$$1524 = 598 + 455 + 345 + 126,$$

$$1524 = 665 + 456 + 273 + 130,$$

$$1524 = 693 + 350 + 286 + 195,$$

$$1524 = 693 + 455 + 220 + 156,$$

$$1524 = 693 + 455 + 286 + 90,$$

$$1524 = 715 + 396 + 273 + 140,$$

$$1524 = 715 + 561 + 170 + 78,$$

$$1524 = 741 + 286 + 266 + 231,$$

$$1524 = 777 + 370 + 195 + 182,$$

$$1524 = 825 + 286 + 273 + 140,$$

$$1524 = 855 + 273 + 266 + 130,$$

$$1524 = 935 + 238 + 231 + 120,$$

$$1524 = 1001 + 280 + 165 + 78.$$