Задача:

Найти наименьшее натуральное число, представимое в виде суммы пяти натуральных слагаемых не менее чем четырьмя способами, таким образом, что любые три слагаемых взаимно просты, а любые два не взаимно просты.

Для начала нужно записать вид числа, представимого в виде суммы пяти слагаемых, любые три из которых взаимно просты, а любые два не взаимно просты.

n = a1 + a2 + a3 + a4 + a5

Так как любые два числа не взаимно просты, пара любых двух чисел имеет НОД, отличный от единицы. Количество способов выбрать два числа из пяти, очевидно, равно 10. Обозначим НОД этих пар через di:

d1 = (a1; a2); d2 = (a1; a3); … d10 = (a4; a5).

Так как любые три числа взаимно просты, все d попарно взаимно просты между собой. Обозначим ki – частное от деления ai на все d, на которые оно делится. Тогда число с заданными условиями принимает вид

n = k1d1d2d3d4 + k2d1d5d6d7 + k3d2d5d8d9 + k4d3d6d8d10 + k5d4d7d9d10,

где все d попарно взаимно просты между собой, а все ki взаимно просты со всеми d кроме тех, на которые делится ai. Это можно пояснить примером: пусть у нас есть числа 6, 10, 15. Они взаимно просты, но любые два не взаимно просты. И если мы возьмём, к примеру, число 6 и домножим его на какое-то число так, чтобы у него не появилось новых простых множителей, то картина не изменится. Действительно, числа 144, 10, 15 так же взаимно просты, а любые два не взаимно просты. Если мы теперь возьмём число 10 и умножим его таким же образом, получим: 144, 200, 15. Различие состоит в том, что до этого НОД первых двух чисел равнялось 2, а теперь 8 (то есть, мы немного переопределили d, теперь, возвращаясь к исходной задаче, d необязательно являются НОД, но это не столь важно, так как нужные свойства чисел сохраняются).

Найдём наименьшее возможное n. Очевидно, что мы получим наименьшее, если все k взять равными единице, а d – наименьшие 10 простых чисел от 2 до 29. Если искать обычным перебором, то нужно будет перебрать 10! = 3628800 вариантов, что довольно много даже для компьютера. Заметим, что если перемножить два маленьких числа и два больших, а потом просуммировать, то получится огромное число. Если же умножить большое на маленькое и сложить, то получим явно намного меньше. 29 – наибольшее простое число, и оно должно умножаться на маленькие числа, на 2 и 3. Пусть d1 = 29, d2 = 2, d5 = 3. Теперь три числа из десяти известны, перебрать осталось всего лишь 7! = 5040 вариантов, и это приемлемо. Компьютерным перебором получено число

48655 = 10846 + 7917 + 2622 + 13585 + 13685

Теперь найдём число, которое представимо в виде такой суммы четырьмя способами. Предлагается довольно простой способ: сгруппируем две пары чисел, вынеся общее d за скобки

k1d1d2d3d4 + d5 (k2d1d6d7 + k3d2d8d9) + d10 (k4d3d6d8 + k5d4d7d9)

Идея заключается в том, что при различных значениях k скобки должны принимать одинаковые значения. Мы берём фиксированные d и подбираем нужные значения k. Тогда каждая скобка представима в виде суммы двумя способами, а всё число – четырьмя способами, и нужные условия не нарушаются. Рассмотрим сначала такое уравнение, где a и b – взаимно просты:

ax1 + by1 = ax2 + by2

a (x1 – x2) = b (y2 – y1)

Так как (a; b) = 1, следовательно (x1 – x2) кратно b, (y2 – y1) кратно a. Минимальные значения подобрать нетрудно:

x1 = b + 1;

x2 = 1;

y1 = 1;

y2 = a + 1.

Подставляем

a (b + 1) + b = a + b (a + 1)

a + b + ab = a + b + ab

Получается, что при фиксированных взаимно простых a и b наименьшее число, представимое двумя способами в виде ax + by (x, y ∈ N), равно a + b + ab. Этот факт можно использовать для подбора d таким образом, чтобы полученное число было как можно меньше.

В первый раз я получил число 4838159. Затем, используя приведённый факт, мне удалось найти число 2490637, вот его представления:

46189 + 1276116 + 78155 + 1071340 + 18837

46189 + 3306 + 1350965 + 1071340 + 18837

46189 + 1276116 + 78155 + 3910 + 1086267

46189 + 3306 + 1350965 + 3910 + 1086267

Примечательно, что оба найденных числа оказались простыми.

К сожалению, мне не удалось ни доказать, что это число – наименьшее с таким свойством, ни найти число меньшее уже найденного, но зато удалось показать, что искомое число находится в отрезке [48655; 2490637].