Назовем натуральное число *a* третькубом, по основанию *g*, если дважды приписав в *g*-ичной системе *a* к себе получим полный куб. Доказать, что существует бесконечно много оснований *g*, для которых есть третькубы.

Пусть *a* – число, записываемое в *g*-ичной системе счисления ровно *n* знаками. То есть *gn-1 ≤ a < gn*. Тогда *a* является третькубом по основанию *g*, если число *a(g2n + gn + 1)* является точным кубом.

Представим число *g2n + gn + 1* следующим образом. Пусть $m\_{3}^{3}$ – некоторый куб, на который делится данное число. Выделим этот куб. Теперь пусть $m\_{2}^{2}$ – некоторый квадрат, на который делится оставшееся число. Выделим его, и остаток обозначим *m­­­1­*. Таким образом, можно записать:

$g^{2n}+g^{n}+1=m\_{1}m\_{2}^{2}m\_{3}^{3}$. Тогда *a* будет являться третькубом, если $a=h^{3}m\_{1}^{2}m\_{2}$, где *h* – некоторое натуральное число. Оно служит для того, чтобы *a* было необходимой разрядности.

Необходимое условие существования третькуба: *a < gn*. Отсюда

$a^{2}<g^{2n}<g^{2n}+g^{n}+1$;

$h^{6}m\_{1}^{4}m\_{2}^{2}<m\_{1}m\_{2}^{2}m\_{3}^{3}$;

$h^{6}m\_{1}^{3}<m\_{3}^{3}$;

$$h^{2}m\_{1}<m\_{3}$$

Разумеется, главное, чтобы выполнялось неравенство ­­*m1 < m3*, а подходящее *h*, скорее всего, получится подобрать, проблемы с этим возникнут только при малых *g*.

Рассмотрим уравнение *x2 + x + 1 = 343 y2*. Оно имеет бесконечно много решений в натуральных числах. Одна серия решений описывается рекуррентной формулой:

*x­0 ­= 18; y0 = 1;*

*xn+1 = P xn + Q yn + K;*

*yn+1 = R x­n + S yn + ­L;*

*P = 34100354867927167*

*Q = 631547410197102672*

*K = 17050177433963583*

*R = 1841246093869104*

*S = 34100354867927167*

*L = 920623046934552*

Эта серия решений и описывает третькубы в бесконечном количестве систем счисления. Действительно, если *n = 1*, *g = x*, тогда *g2 + g + 1 = 73y2*; тогда мы представляем число *g2 + g + 1* в виде произведения *mi* таким образом: *m3 = 7*, *m2 = y* *m1 = 1*, условие *m1 < m3* выполняется. Третькубом по основанию *g* будет являться число *a = h3y* при *h = 1* и, возможно, при других подходящих *h*, ведь *g0 < y < g1*, это следует из того, что для достаточно больших чисел *g2* намного больше, чем *g + 1*. Примеры третькубов из найденной серии для первого решения при *h = 1* и *h = 2*: $\overline{111}\_{18}=7^{3}$; $\overline{888}\_{18}=14^{3}$.