О. Б. Полубасов    13.12.2015 г.

===========ММ210===============

**ММ210** (13 баллов)

Решения принимаются до 13.12.2015

1. Пусть {ha, hb, hc, ba, bb, bc, ma, mb, mc} – множество, состоящее из величин высот, биссектрис, и медиан некоторого треугольника. Сколько элементов может быть в М?
2. Пусть в разностороннем треугольнике АВС (a < b < c) и множество М из п.1 содержит 9 элементов. Соответствующие числа расположили в порядке возрастания. Сколько различных упорядочиваний может при этом получиться?
3. Тот же вопрос для случая, когда среди чисел {ha, hb, hc, ba, bb, bc, ma, mb, mc} могут быть одинаковые. (В этом случае полагаем (a ≤ b ≤ c) и рассматриваем строгое упорядочивание классов одинаковых величин. Перестановки внутри класса не важны.)

Примечание.
Получить ответ для каждого из случаев:
1) рассматриваются только невырожденные треугольники;
2) допускаются вырожденные треугольники (все вершины лежат на одной прямой).

=========================

Если все вершины треугольника совпадают, то длины всех отрезков равны нулю, множество М состоит из одного элемента, который можно упорядочить единственным образом. Далее будем считать, что не все вершины совпадают.

Рассмотрим невырожденные треугольники.

Пусть c = 1, a и b – параметры, тогда допустимая область – пересечение трёх полуплоскостей: a ≤ b, b ≤ 1, a + b > 1.

Полупериметр p = (a + b + 1)/2, площадь $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-1)}$,

ha = 2S/a, hb = 2S/b, hc = 2S,

$$ba = \frac{2}{b+1}\sqrt{bp(p-a)},$$

$$bb = \frac{2}{a+1}\sqrt{ap(p-b)},$$

$$bc = \frac{2}{a+b}\sqrt{abp(p-1)},$$

$$ma = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+1)-a^2},$$

$$mb = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+1)-b^2},$$

$$mc = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2)-1}.$$

| | | |
|---|---|---|
| ha | ba | ma |
| hb | bb | mb |
| hc | bc | mc |

18 неравенств вытекают непосредственно из свойств невырожденных треугольников:

ha ≤ ba ≤ ma, hb ≤ bb ≤ mb, hc ≤ bc ≤ mc,

hc ≤ hb ≤ ha, bc ≤ bb ≤ ba, mc ≤ mb ≤ ma.

Причём, равенство достигается только для равнобедренных треугольников. Ещё 9 неравенств являются следствиями предыдущих:

hc ≤ bb, hc ≤ ba, hc ≤ mb, hc ≤ ma,

hb ≤ ba, hb ≤ ma,

bc ≤ mb, bc ≤ ma,

bb ≤ ma.

**Теорема 1.**

Если треугольник невырожденный (p > 1) и разносторонний, то ha > bc

**Доказательство.**

Предположим, что ha ≤ bc. Тогда

$4p(p-a)(p-b)(p-1)/a^2 \le 4abp(p-1)/(a+b)^2$,

$(p-a)(p-b)(a+b)^2 \le a^3b$,

$(1+b-a)(1-b+a)(a+b)^2 \le 4a^3b$,

$(1-a^2-b^2+2ab)(a^2+b^2+2ab) \le 4a^3b$,

$a^2+b^2+2ab-a^4-a^2b^2-2a^3b-a^2b^2-b^4-2ab^3+2a^3b+2ab^3+4a^2b^2-4a^3b \le 0$,

$a^2+b^2+2ab-a^4-b^4+2a^2b^2-4a^3b \le 0$,

$(a^2-a^4)+(b^2-b^4)+2ab(1-2a^2+ab) \le 0$,

$a^2(1-a^2)+b^2(1-b^2)+2ab(1-2a^2+ab) \le 0$.

Но, так как 0 < a < b < 1, то каждое из трёх слагаемых > 0. Противоречие.

**Теорема 2.**

Если треугольник невырожденный и разносторонний, то ba > mc.

**Доказательство.**

Предположим, что ba ≤ mc. Тогда

$4bp(p-a)/(b+1)^2 \le (2a^2+2b^2-1)/4$,

$16bp(p-a) \le (2a^2+2b^2-1)(b+1)^2$,

$16b(b+1+a)(b+1-a) \le (2a^2+2b^2-1)(b^2+2b+1)$,

$16b^3+32b^2+16b-16a^2b \le 2a^2b^2+2b^4-b^2+4a^2b+4b^3-2b+2a^2+2b^2-1$,

$2b^4 - 12b^3 + 2a^2b^2 - 31b^2 + 20a^2b - 18b + 2a^2 - 1 \geq 0$,
Так как $b > a$, то $2b^4 - 12b^3 + 2b^4 - 31b^2 + 20b^3 - 18b + 2b^2 - 1 > 0$,
$4b^4 + 8b^3 - 29b^2 - 18b - 1 > 0$,
$b^2(4b^2 - 29) + 2b(4b^2 - 9) + -1 > 0$.
Но, так как $0 < b < 1$, то каждое из трёх слагаемых $< 0$. Противоречие.

Осталось всего 7 отношений между парами длин отрезков с неоднозначно определённым результатом:
ha vs bb, ha vs mb, ha vs mc, ba vs mb, hb vs bc, hb vs mc, bb vs mc.

Графики уравнений разбивают область допустимых значений параметров a и b на 18 областей (рис. 1). Текст неравенств отражает ситуацию с той стороны графика, где он расположен.

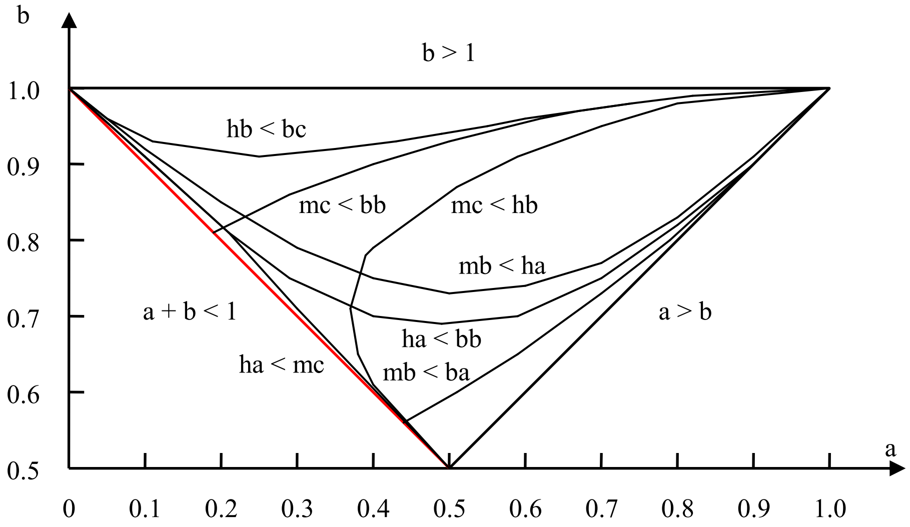


Рис. 1.

Некоторые точки и линии находятся очень близко друг к другу. Чтобы их относительное расположение стало более наглядным, перейдём от графиков к топологической схеме (рис. 2).

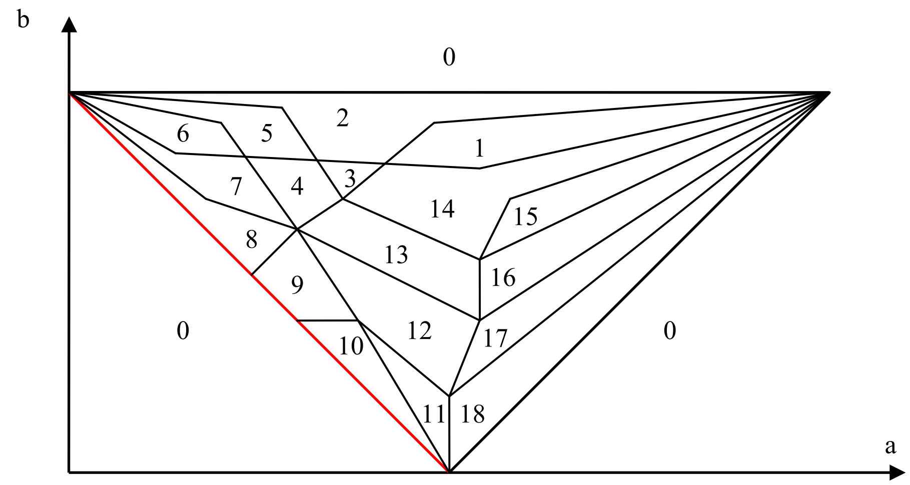


Рис. 2.

Характерные точки (a, b) областей и отношения между отрезками.

1. (0.950000, 0.999111) hc < hb < bc < mc < bb < mb < ha < ba < ma. 9 классов.
2. (0.250000, 0.960000) hc < hb < bc < bb < mc < mb < ha < ba < ma. 9 классов.
3. (0.230000, 0.880000) hc < bc < hb < bb < mc < mb < ha < ba < ma. 9 классов.
4. (0.200000, 0.830000) hc < bc < hb < bb < mc < ha < mb < ba < ma. 9 классов.
5. (0.020400, 0.982400) hc < hb < bc < bb < mc < ha < mb < ba < ma. 9 классов.
6. (0.015910, 0.985910) hc < hb < bc < bb < ha < mc < mb < ba < ma. 9 классов.
7. (0.097400, 0.908980) hc < bc < hb < bb < ha < mc < mb < ba < ma. 9 классов.
8. (0.190000, 0.820000) hc < bc < hb < ha < bb < mc < mb < ba < ma. 9 классов.
9. (0.210000, 0.800000) hc < bc < hb < ha < mc < bb < mb < ba < ma. 9 классов.
10. (0.439660, 0.561256) hc < bc < hb < ha < mc < bb < ba < mb < ma. 9 классов.
11. (0.470109, 0.530600) hc < bc < hb < mc < ha < bb < ba < mb < ma. 9 классов.
12. (0.340000, 0.700000) hc < bc < hb < mc < ha < bb < mb < ba < ma. 9 классов.
13. (0.320000, 0.760000) hc < bc < hb < mc < bb < ha < mb < ba < ma. 9 классов.
14. (0.360000, 0.840000) hc < bc < hb < mc < bb < mb < ha < ba < ma. 9 классов.
15. (0.600000, 0.800000) hc < bc < mc < hb < bb < mb < ha < ba < ma. 9 классов.
16. (0.420000, 0.720000) hc < bc < mc < hb < bb < ha < mb < ba < ma. 9 классов.
17. (0.460000, 0.630000) hc < bc < mc < hb < ha < bb < mb < ba < ma. 9 классов.
18. (0.500000, 0.560000) hc < bc < mc < hb < ha < bb < ba < mb < ma. 9 классов.

Рассмотрим линии, разделяющие пары областей (внешней области припишем номер 0).

1-2. hc < hb < bc < bb = mc < mb < ha < ba < ma. 8 классов.
3-14. hc < bc < hb < bb = mc < mb < ha < ba < ma. 8 классов.
4-13. hc < bc < hb < bb = mc < ha < mb < ba < ma. 8 классов.
8-9. hc < bc < hb < ha < bb = mc < mb < ba < ma. 8 классов.
1-14. hc < hb = bc < mc < bb < mb < ha < ba < ma. 8 классов.
2-3. hc < hb = bc < bb < mc < mb < ha < ba < ma. 8 классов.
4-5. hc < bc = hb < bb < mc < ha < mb < ba < ma. 8 классов.
6-7. hc < hb = bc < bb < ha < mc < mb < ba < ma. 8 классов.
3-4. hc < bc < hb < bb < mc < mb = ha < ba < ma. 8 классов.
2-5. hc < hb < bc < bb < mc < mb = ha < ba < ma. 8 классов.
13-14. hc < bc < hb < mc < bb < mb = ha < ba < ma. 8 классов.
15-16. hc < bc < mc < hb < bb < mb = ha < ba < ma. 8 классов.
4-7. hc < bc < hb < bb < mc = ha < mb < ba < ma. 8 классов.
5-6. hc < hb < bc < bb < mc = ha < mb < ba < ma. 8 классов.
9-12. hc < bc < hb < mc = ha < bb < mb < ba < ma. 8 классов.
10-11. hc < bc < hb < ha = mc < bb < ba < mb < ma. 8 классов.
7-8. hc < bc < hb < bb = ha < mc < mb < ba < ma. 8 классов.
12-13. hc < bc < hb < mc < bb = ha < mb < ba < ma. 8 классов.
16-17. hc < bc < mc < hb < bb = ha < mb < ba < ma. 8 классов.
9-10. hc < bc < hb < ha < mc < bb < mb = ba < ma. 8 классов.
11-12. hc < bc < hb < mc < ha < bb < mb = ba < ma. 8 классов.
17-18. hc < bc < mc < hb < ha < bb < mb = ba < ma. 8 классов.

11-18.hc < bc < hb = mc < ha < bb < ba < mb < ma. 8 классов.
12-17.hc < bc < hb = mc < ha < bb < mb < ba < ma. 8 классов.
13-16.hc < bc < hb = mc < bb < ha < mb < ba < ma. 8 классов.
14-15.hc < bc < hb = mc < bb < mb < ha < ba < ma. 8 классов.
2-0. hb = bc < bb = bc < mb = mc < ha = ba = ma. 4 класса.
18-0. hc = bc = mc < ha = hb < ba = bb < ma = mb. 4 класса.

Если длиной биссектрисы считать расстояние от вершины треугольника до точки пересечения биссектрисы угла с противолежащей стороной, то для вырожденных треугольников длины биссектрис углов A и B оказываются не определёнными. Доопределим эти длины непрерывным образом, а именно, будем считать длиной биссектрисы значение соответствующего выражения

$ba = \frac{2}{b+1}\sqrt{bp(p-a)}$ или $bb = \frac{2}{a+1}\sqrt{ap(p-b)}$ при b = a – 1.

8-0. ha = hb = hc = bc < bb < mc < mb < ba < ma. 6 классов.
9-0. ha = hb = hc = bc < mc < bb < mb < ba < ma. 6 классов.
10-0. ha = hb = hc = bc < mc < bb < ba < mb < ma. 6 классов.

Рассмотрим точки на границе нескольких областей.

1-2-3-14. a ≈ 0.705605, b ≈ 0.975537.
hc < hb = bc < bb = mc < mb < ha < ba < ma. 7 классов.
2-3-4-5. a ≈ 0.039856, b ≈ 0.966108.
hc < hb = bc < bb < mc < mb = ha < ba < ma. 7 классов.
4-5-6-7. a ≈ 0.032095, b ≈ 0.971822.
hc < bc = hb < bb < mc = ha < mb < ba < ma. 7 классов.
3-4-13-14. a ≈ 0.223197, b ≈ 0.830994.
hc < bc < hb < bb = mc < mb = ha < ba < ma. 7 классов.
4-7-8-9-12-13. a ≈ 0.194801, b ≈ 0.817960.
hc < bc < hb < bb = mc = ha < mb < ba < ma. 7 классов.
9-10-11-12. a ≈ 0.439660, b ≈ 0.562171.
hc < bc < hb < mc = ha < bb < mb = ba < ma. 7 классов.
11-12-17-18. a ≈ 0.440776, b ≈ 0.562741.
hc < bc < hb = mc < ha < bb < mb = ba < ma. 7 классов.
12-13-16-17. a ≈ 0.366141, b ≈ 0.712023.
hc < bc < hb = mc < bb = ha < mb < ba < ma. 7 классов.
13-14-15-16. a ≈ 0.377964, b ≈ 0.755929.
hc < bc < hb = mc < bb < mb = ha < ba < ma. 7 классов.
1-2-14-15-16-17-18-0. a = 1, b = 1.
hc = bc = mc = ha = hb = ba = bb = ma = mb = 1. 1 класс.

При $a = 0$ длина высоты $ha$ не определена, так как не определена прямая, на которой лежит сторона $a$. Более того, приближаясь к точке ($a = 0$, $b = 1$) по разным траекториям, мы получим разные пределы (от 0 до 1), а число классов может составлять 3 или 4.

2-3-4-7-8-0. $a = 0$, $b = 1$.
$ha$, $hb = hc = bc = bb < mc = mb < ba = ma$. 3 или 4 класса.
8-9-0. $a = (\sqrt{33} - 5)/4 \approx 0.186141$, $b = 1 - a \approx 0.813859$.
$ha = hb = hc = bc < mc = bb < mb < ba < ma$. 5 классов.
9-10-0. $a = (5 - \sqrt{17})/2 \approx 0.438447$, $b = 1 - a \approx 0.561553$.
$ha = hb = hc = bc < mc < bb < mb = ba < ma$. 5 классов.
10-11-18-0. $a = 0.5$, $b = 0.5$.
$ha = hb = hc = bc = mc < bb = ba < mb = ma$. 3 класса.

**Ответ.**
1.1. 1, 4, 7, 8, 9.
1.2. 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
2.1. 18.
2.2. 18.
3.1. 18 + 28 + 10 = 56.
3.2. 56 + 3 + 4 = 63.