О. Б. Полубасов   12.08.2016 г.

===========MM211===============

MM211 (3 балла)

Решения принимаются до 10.09.2016

Доказать, что при любом четном $f > 4$ существует многогранник, имеющий f граней, все грани которого четырехугольники.

===============================

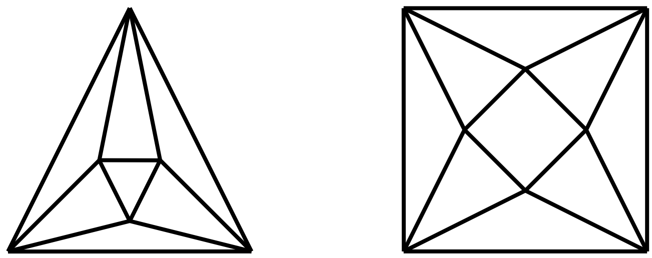
Ответ. Требуемое семейство образуют, например, все многогранники, двойственные к антипризмам. Ровно f четырёхугольных граней имеет многогранник, двойственный к $(f/2)$-угольной антипризме.

Дополнительный анализ

Интересны следующие вопросы.

- Единственно ли описанное в ответе семейство?
- Существуют ли многогранники с другими значениями f?

Удобнее рассматривать не многогранники, описанные в условии, а двойственные к ним (далее – ДМ), так как степень вершины контролировать проще, чем число сторон у грани. Поэтому переформулируем условие задачи: **доказать, что при любом четном $f > 4$ существует ДМ, имеющий f вершин, все вершины которого имеют степень 4.**



а) $f = 6$.   б) $f = 8$.

Рис. 1. Двойственные многогранники (ДМ) при $f = 6$ и $f = 8$.

Пусть f – число вершин ДМ, G – число граней, E – число рёбер.

По теореме Эйлера, $f + G = E + 2$.

Так как каждое ребро инцидентно двум вершинам, а каждая вершина – четырём рёбрам, то $E = 2f$. Следовательно, $G = f + 2$.

Топологически эквивалентными многогранниками назовём многогранники, остовы которых являются изоморфными графами.

Понятно, что вершин должно быть не менее 5. Но полный 5-вершинный граф не планарен., поэтому требуемого ДМ при $f < 6$ не существует.

Легко доказать, что при $f = 6$ существует единственный ДМ.

Доказательство.

В дополнении рассматриваемого ДМ каждая из 6 вершин имеет степень 1, поэтому это просто три ребра, не имеющие общих вершин. Все такие графы изоморфны, а их дополнение допускает единственную укладку на сфере – всем нам известный октаэдр.

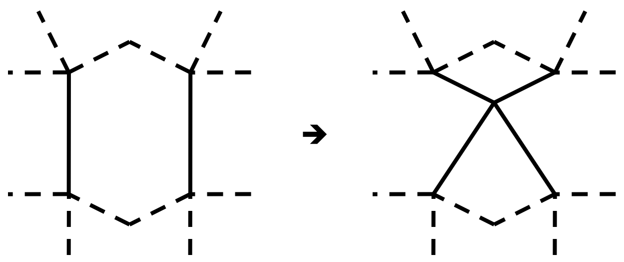
С нижней границей f разобрались, а насколько критично требование чётности f?

Не существует ДМ с $f = 7$.

Доказательство.

При $f = 7$ в дополнении рассматриваемого ДМ каждая из 7 вершин должна иметь степень 2. Так как петель и параллельных рёбер быть не может, то это либо простой цикл длины 7, либо два цикла с длинами 3 и 4. Дополнения обоих этих графов не планарны.

Любой ДМ, имеющий n-угольную грань, где $n > 3$, можно превратить в ДМ с числом вершин f на 1 больше (рис. 2). При этом выбранная грань разбивается на две меньших, но зато у двух соседних граней число сторон увеличивается на 1. Кроме того, добавляется одна вершина и два ребра.



а) б)

Рис. 2. Получение ДМ(f+1) из ДМ(f).

Так как любой ДМ при $f > 7$ содержит хотя бы одну n-угольную грань, где $n > 3$, то для любых $f > 7$ существует ДМ, имеющий f вершин, все вершины которого имеют степень 4.

Выводы. Многогранники, имеющие ровно f граней, все грани которых – четырёхугольники, существуют при $f = 6$ и при любых $f \geq 8$.

Перечисление двойственных многогранников

Заметим, что остовы выпуклых многогранников – это в точности трёх-связные планарные простые графы.

Единственные ДМ при f = 6 и f = 8 представлены на рис. 1, а единственный ДМ при f = 9 – на рис. 3.

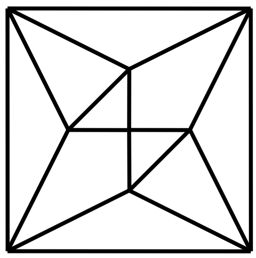
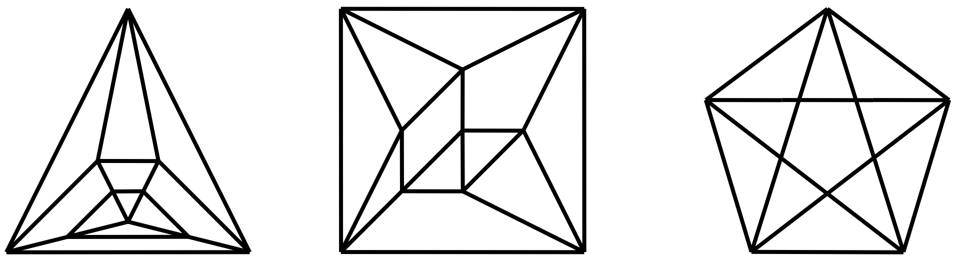
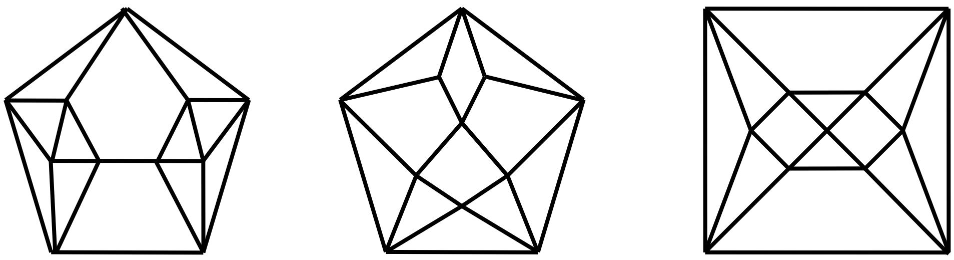


Рис. 3. Двойственный многогранник (ДМ) при f = 9.



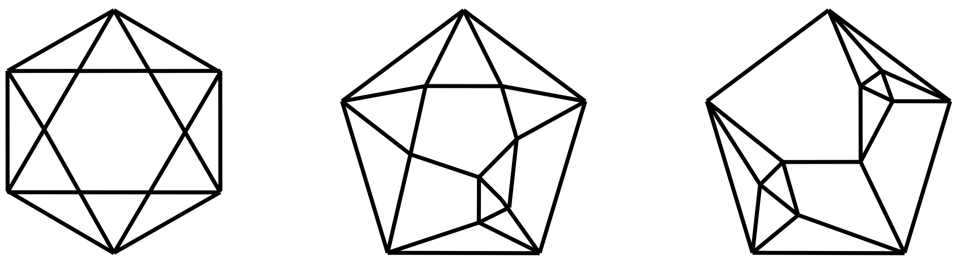
1) 2) 3)

Рис. 4. Двойственные многогранники (ДМ) при f = 10.



1) 2) 3)

Рис. 5. Двойственные многогранники (ДМ) при f = 11.



1) 2) 3)

Рис. 6а. Двойственные многогранники (ДМ) при f = 12.

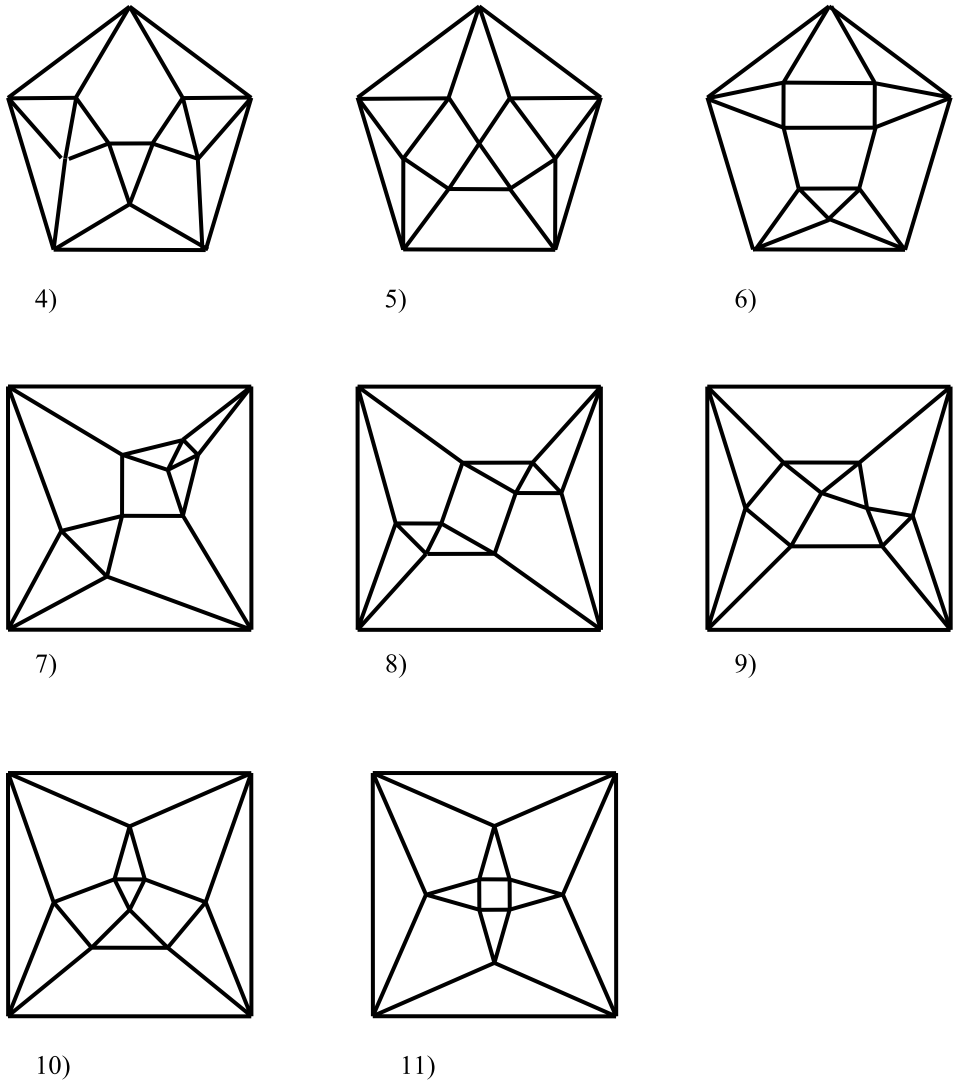


Рис. 6б. Двойственные многогранники (ДМ) при f = 12, окончание.

Количество рассматриваемых многогранников при f = 1…17 образует последовательность { 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 3, 3, 11, 18, 58, 139, 451, 1326... }. В OEIS этой последовательности нет.