О. Б. Полубасов   20.08.2016 г.

===========ММ213===============

ММ213 (4 балла)

Решения принимаются до 24.09.2016

1. Пусть $H = \{h_1, h_2, \ldots h_f\}$, где f - количество граней, а h_i - число сторон i-й грани. Какое наименьшее значение может принимать $f - |H|$?
2. Пусть g_i означает число i-угольных граней многогранника для каждого значения i. Могут ли все g_i не превышать 2?

=========================

1. Удобнее рассматривать не многогранники, описанные в условии, а двойственные к ним (далее – ДМ), так как степень вершины контролировать проще, чем число сторон у грани. Поэтому переформулируем условие задачи: **«Пусть $\boldsymbol{H = \{h_1, h_2 \ldots h_f\}}$, где f – количество вершин, а $\boldsymbol{h_i}$ – степень i-й вершины. Какое наименьшее значение может принимать $\boldsymbol{f - |H|}$?».**

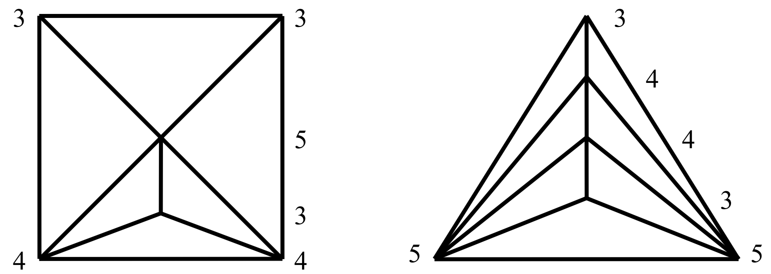
Топологически эквивалентными многогранниками назовём многогранники, остовы которых являются изоморфными графами.

Очевидно, что $3 \le h_i \le f - 1$. Поэтому $f - |H| \ge 3$. В то же время, для некоторых ДМ значение $f - |H| = 3$ достижимо:

Тетраэдр: $f = 4$, $H = \{3, 3, 3, 3\}$, $|H| = 1$, $f - |H| = 3$.
Треугольная бипирамида: $f = 5$, $H = \{3, 3, 4, 4, 4\}$, $|H| = 2$, $f - |H| = 3$.
Четырёхугольная пирамида: $f = 5$, $H = \{3, 3, 3, 3, 4\}$, $|H| = 2$, $f - |H| = 3$.
Рис. 1. а: $f = 6$, $H = \{3, 3, 3, 4, 4, 5\}$, $|H| = 3$, $f - |H| = 3$.
Рис. 1. б: $f = 6$, $H = \{3, 3, 4, 4, 5, 5\}$, $|H| = 3$, $f - |H| = 3$.
Рис. 2. а: $f = 7$, $H = \{3, 3, 3, 4, 4, 5, 6\}$, $|H| = 4$, $f - |H| = 3$.
Рис. 2. б: $f = 7$, $H = \{3, 3, 3, 4, 4, 5, 6\}$, $|H| = 4$, $f - |H| = 3$.
Рис. 2. в: $f = 7$, $H = \{3, 3, 4, 4, 5, 5, 6\}$, $|H| = 4$, $f - |H| = 3$.

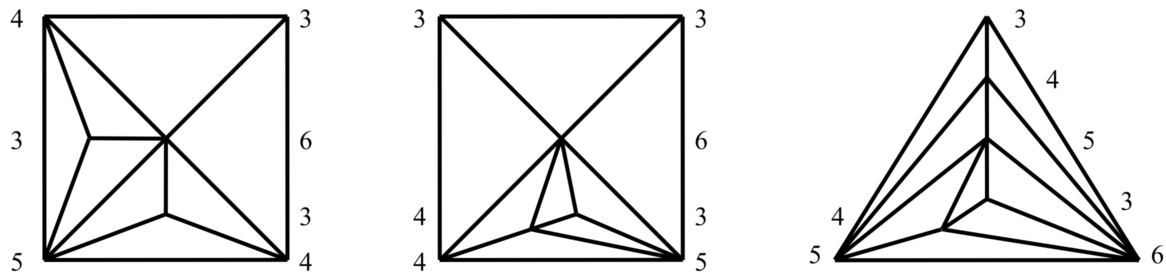
Так как $\sum_{i=1}^{V} h_i = 2E \le 6f - 12$, то средняя степень вершины ограничена. В Н должны присутствовать все степени от 3 до f-1, причём общее число вершин нечётной степени должно быть чётным, поэтому количество различных подходящих ДМ конечно.

Все восемь подходящих ДМ описаны выше.



а) H = {3, 3, 3, 4, 4, 5}. б) H = {3, 3, 4, 4, 5, 5}.

Рис. 1. Двойственные многогранники (ДМ) со значением f – |H| = 3, f = 6.



а) H = {3, 3, 3, 4, 4, 5, 6}. б) H = {3, 3, 3, 4, 4, 5, 6}. в) H = {3, 3, 4, 4, 5, 5, 6}.

Рис. 2. Двойственные многогранники (ДМ) со значением f – |H| = 3, f = 7.

2. Продолжим рассматривать двойственные многогранники (ДМ). Второй вопрос переформулируется так: **«Может ли число вершин каждой степени не превышать 2?».**

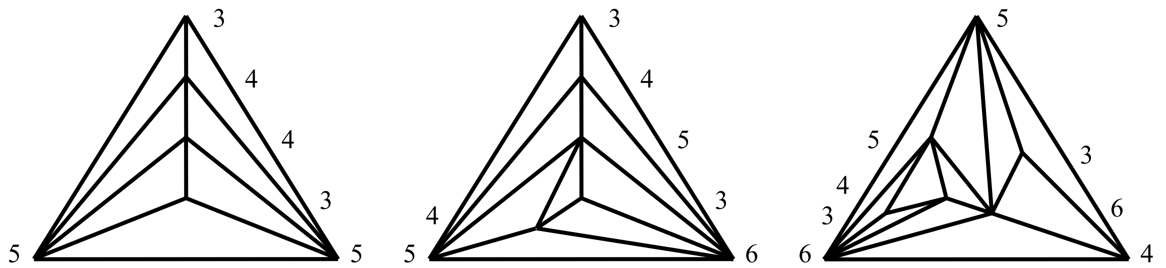
Так как $\sum_{i=1}^{V} h_i = 2E \leq 6f - 12$, то средняя степень вершины ограничена, поэтому количество различных подходящих ДМ конечно.

Пусть макс. степень вершины равна x ≥ 7, => f ≥ 8. Варианты:
3+3+4+4+5+5+6+x ≥ 37 > 6*8 – 12 = 36. Не подходит.
3+3+4+4+5+5+6+6+x ≥ 43 > 6*9 – 12 = 42. Не подходит.
3+3+4+4+5+5+6+6+7+x ≥ 50 > 6*10 – 12 = 48. Не подходит.
3+3+4+4+5+5+6+6+x+x ≥ 50 > 6*10 – 12 = 48. Не подходит.
Следовательно, макс. степень вершины меньше 7.

Пусть макс. степень равна 3, => f ≥ 4, нет вариантов.
Пусть макс. степень равна 4, => f ≥ 5, нет вариантов.

Пусть макс. степень равна 5, => f ≥ 6. Варианты:
3+3+4+4+5+5 = 24 = 6*6 – 12.
Пусть макс. степень равна 6, => f ≥ 7. Варианты:
3+3+4+4+5+5+6 = 30 = 6*7 – 12.
3+3+4+4+5+5+6+6 = 36 = 6*8 – 12.

Все три возможных варианта представлены на рис. 3 а-в.



а) f = 6. б) f = 7. в) f = 8.

Рис. 3. Двойственные многогранники (ДМ), число вершин каждой степени которых не превышает 2.

ДМ 3а и 3б мы уже видели на рис. 1. б и 2. в.

Ответ.

1. f - |H| может принимать значение 3, но не меньше. Существует 8 различных многогранников со значением f - |H| = 3.

2. Могут. Существуют 3 различных многогранника с требуемыми свойствами.