О. Б. Полубасов   25.09.2016 г.

===========ММ214===============

ММ214 (4 балла)

Решения принимаются до 01.10.2016

1. Все грани многогранника - n-угольники. При каких n это возможно?

2. При каком наименьшем числе граней существует многогранник, все грани которого пятиугольны?

============================

1. Пусть V – число вершин многогранника, G – число граней, E – число рёбер. По теореме Эйлера, $V + G = E + 2$. Так как каждое ребро инцидентно двум граням, а каждая грань – n рёбрам, то $E = nG/2$. Следовательно, $V + G = nG/2 + 2$, $n = (2V – 4)/G + 2$.

Так как каждая грань инцидентна n вершинам, а каждая вершина – не менее чем трём граням, то $3V \le nG = 2V + 2G – 4$, $V \le 2G – 4$, $n \le (4G – 12)/G + 2 = 4 + 2 – 12/G < 6$.

С другой стороны, $n \ge 3$.

Тетраэдр, куб и додекаэдр всем нам известны.

2. Удобнее рассматривать не многогранники, описанные в условии, а двойственные к ним (далее – ДМ), так как степень вершины контролировать проще, чем число сторон у грани. Поэтому переформулируем условие задачи: **при каком наименьшем числе вершин существует ДМ, все вершины которого имеют степень 5?**

Пусть V – число вершин ДМ, G – число граней, E – число рёбер.

По теореме Эйлера, $V + G = E + 2$.

Так как каждое ребро инцидентно двум вершинам, а каждая вершина – пяти рёбрам, то $E = 5V/2$. Следовательно, $G = 3V/2 + 2$, а это значит, что могут существовать только ДМ с чётным числом вершин.

По теореме Эйлера, для планарных графов выполняется: $E \le 3V – 6$. Но $E = 5V/2$, следовательно, $V \ge 12$. Что икосаэдр существует, мы в курсе.

Ответ.

1. Все грани многогранника могут быть n-угольниками при n = 3, 4, 5.

2. Наименьшее число граней у многогранника, все грани которого пятиугольны, равно 12 (у додекаэдра).

Дополнительный анализ

Продолжаем рассматривать двойственные многогранники (ДМ). Необычный ракурс икосаэдра на рис. 1 показывает общий способ построения ДМ с числом вершин 4n, где n ≥ 3, а степень каждой вершины равна 5.

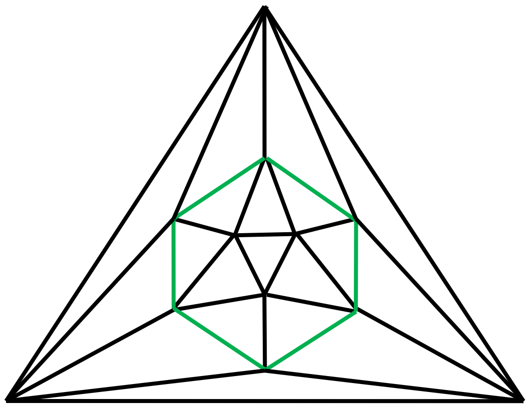


Рис. 1. Двойственный многогранник, все 12 вершин которого имеют степень 5.

ДМ, все 14 вершин которого имеют степень 5, не существует.
ДМ, все 16 вершин которого имеют степень 5, представлен на рис. 1.

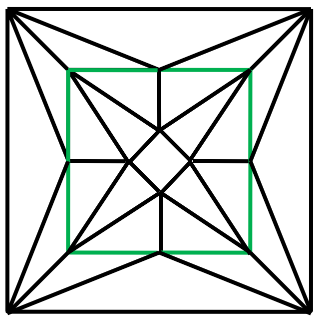
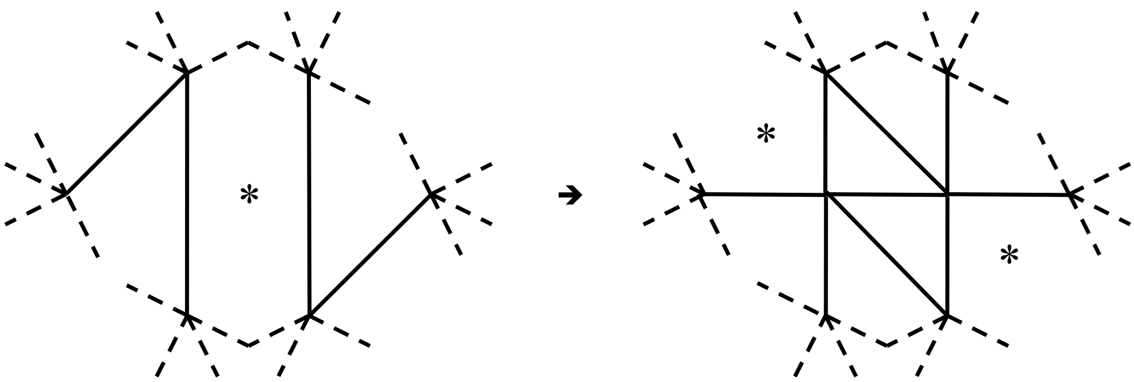


Рис. 2. Двойственный многогранник, все 16 вершин которого имеют степень 5.



а) б)

Рис. 2. Добавление в ДМ двух вершин.

По теореме Эйлера, все ДМ с числом вершин больше 12 имеют хотя бы одну грань размера больше чем 3.

Рассмотрим грань размера больше чем 3 (рис. 2). Можно добавить две вершины и пять рёбер и получить ДМ, имеющий на две вершины больше. При этом выбранная грань разбивается на четыре части, а размер двух других граней увеличивается на 1.

Вывод 1. Многогранники, имеющие ровно n граней, все грани которых 5-угольны, существуют при n = 12 и при всех чётных n ≥ 16.

Многогранники, все грани которых – четырёхугольники, были рассмотрены в задаче ММ201, поэтому осталось рассмотреть только многогранники, все грани которых – треугольники. По теореме Эйлера, число граней n должно быть чётно и не менее 4. Для n=4 подходит тетраэдр, для n > 4 подходит $\frac{n}{2}$-угольная бипирамида.

Вывод 2. Многогранники, имеющие ровно n граней, все грани которых треугольны, существуют при всех чётных n ≥ 4.