

=====ММ217=====

ММ217 (6 баллов)

Решения принимаются до 05.11.2016

Диагонали AC_1 и BD_1 шестигранника $ABCDA_1B_1C_1D_1$, все грани которого четырехугольны, пересекаются в точке O . Могут ли остальные пары диагоналей скрещиваться?

=====

Утверждение 1.

(Диагонали AC_1 и BD_1 пересекаются) \Leftrightarrow (диагонали A_1C и B_1D пересекаются).

Доказательство.

Раз прямые AC_1 и BD_1 пересекаются, значит, точки A, B, C_1 и D_1 лежат в одной плоскости. Следовательно, прямые AB и D_1C_1 либо параллельны, либо пересекаются. Рассмотрим оба случая по отдельности.

1. Пусть прямые AB и D_1C_1 параллельны. Рассмотрим какую-нибудь плоскость S , перпендикулярную прямым AB и D_1C_1 . Плоскости $ABCD$, DCC_1D_1 , $D_1C_1B_1A_1$ и A_1B_1BA перпендикулярны плоскости S . Следовательно, прямые A_1B_1 и DC перпендикулярны плоскости S , а значит, параллельны между собой.

Следовательно, диагонали A_1C и B_1D лежат в одной плоскости, то есть, не могут скрещиваться, а значит, пересекаются.

2. Пусть прямые AB и D_1C_1 пересекаются в точке P . Следовательно, плоскости $ABCD$, DCC_1D_1 , $D_1C_1B_1A_1$ и A_1B_1BA проходят через точку P . Следовательно, прямые A_1B_1 и DC пересекаются в точке P , а значит, точки A_1, B_1, C и D лежат в одной плоскости. Следовательно, диагонали A_1C и B_1D не могут скрещиваться, а значит, пересекаются.

Обратное утверждение доказывается аналогично:

Аналогично доказываются и два других утверждения:

Утверждение 2.

(Диагонали AC_1 и B_1D пересекаются) \Leftrightarrow (диагонали A_1C и BD_1 пересекаются).

Утверждение 3.

(Диагонали AC_1 и A_1C пересекаются) \Leftrightarrow (диагонали BD_1 и B_1D пересекаются).

В то же время, эти три утверждения независимы. Таким образом, возможны всего 4 принципиально различные конфигурации (таб. 1).

Случай	Координаты	Число пересекающихся пар диагоналей	Скрещивающиеся пары диагоналей
1	A = (0, 0, 0) B = (10, 0, 0) C = (10, 10, 0) D = (0, 10, 0) A ₁ = (0, 0, 10) B ₁ = (10, 0, 10) C ₁ = (10, 10, 10) D ₁ = (0, 10, 10)	6	-
2	A = (0, 0, 0) B = (10, 0, 0) C = (10, 10, 0) D = (0, 10, 0) A ₁ = (0, 0, 10) B ₁ = (10, 0, 10) C ₁ = (10, 9, 10) D ₁ = (0, 9, 10)	4	AC ₁ и A ₁ C BD ₁ и B ₁ D
3	A = (0, 0, 0) B = (10, 0, 0) C = (9, 10, 0) D = (0, 10, 0) A ₁ = (0, 0, 10) B ₁ = (10, 0, 10) C ₁ = (9, 10, 10) D ₁ = (0, 10, 10)	4	AC ₁ и B ₁ D A ₁ C и BD ₁
4	A = (0, 0, 0) B = (10, 0, 0) C = (10, 10, 0) D = (0, 10, 0) A ₁ = (0, 0, 10) B ₁ = (10, 0, 10) C ₁ = (10, 9, 9) D ₁ = (0, 9, 9)	2	AC ₁ и A ₁ C BD ₁ и B ₁ D AC ₁ и B ₁ D A ₁ C и BD ₁

Таблица. 1.

Ответ. Не могут скрещиваться диагонали A₁C и B₁D, а остальные пары диагоналей – могут.